

ปฏิสัมพันธ์ (Interaction)

โมเดลพหุระดับ (Multilevel Modeling)

สันทัด พรประเสริฐมานิต

โครงร่างการนำเสนอ

- ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ (Cross-level interaction)
- ปฏิสัมพันธ์รูปแบบอื่น

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ

- ความชันแบบกลุ่มที่เกิดขึ้น (β_{1j}) เหมือนเป็นตัวแปรหนึ่งในระดับกลุ่ม ที่สามารถใช้ตัวแปรในระดับกลุ่มในการทำนาย

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij} \quad \text{ระดับที่ 1}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_{1j} + u_{0j}$$

ระดับที่ 2

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_{1j} + u_{1j}$$

- สมการรวมทั้ง 2 ระดับจะเป็นดังนี้

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_{1j} + u_{0j} + (\gamma_{10} + \gamma_{11}W_{1j} + u_{1j})X_{1ij} + e_{ij}$$

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_{1j} + \gamma_{10}X_{1ij} + \gamma_{11}W_{1j}X_{1ij} + u_{0j} + u_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ

- สามารถทำความเข้าใจแบบง่ายได้ดังนี้

$$Y_{ij} = (\gamma_{00} + \gamma_{01}W_{1j}) + (\gamma_{10} + \gamma_{11}W_{1j})X_{1ij} + u_{0j} + u_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

$$Y_{ij} = (\gamma_{00} + \gamma_{10}X_{1ij}) + (\gamma_{01} + \gamma_{11}X_{1ij})W_{1j} + u_{0j} + u_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

จุดตัดอย่างง่าย

(Simple Intercept)

ความชันอย่างง่าย

(Simple Slope)

- อิทธิพลของ W_1 ขึ้นอยู่กับค่าของ X_1 หรือในทางกลับกันอิทธิพลของ X_1 ขึ้นอยู่กับค่าของ W_1
- ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองตัวจะเรียกว่าปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ (Cross-level Interaction)

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij} \quad \text{ระดับที่ 1}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_{1j} + u_{0j} \quad \text{ระดับที่ 2}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_{1j} + u_{1j}$$

$$Y_{ij} = (\gamma_{00} + \gamma_{10}X_{1ij}) + (\gamma_{01} + \gamma_{11}X_{1ij})W_{1j} + u_{0j} + u_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

- γ_{00} คือ ค่าของตัวแปรตาม เมื่อ X_1, W_1 มีค่าเท่ากับ 0
- γ_{10} คือ ค่าของ Y ที่เปลี่ยนแปลงไป เมื่อค่า X_1 เพิ่มขึ้น 1 แต่มีเฉลี่ยทุกกลุ่ม เมื่อทุกกลุ่มมีค่า W_1 เท่ากับ 0
- γ_{01} คือ ค่าคาดหวังของ Y เมื่อ X_1 เท่ากับ 0 ที่เปลี่ยนแปลงไป เมื่อค่า W_1 เพิ่มขึ้น 1 แต่มี
- γ_{11} คือ ความชันของ X_1 ที่มีต่อ Y ที่เปลี่ยนแปลงไป เมื่อค่า W_1 เพิ่มขึ้น 1 แต่มี

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij} \quad \text{ระดับที่ 1}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_{1j} + u_{0j}$$

ระดับที่ 2

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_{1j} + u_{1j}$$

$$Y_{ij} = (\gamma_{00} + \gamma_{10}X_{1ij}) + (\gamma_{01} + \gamma_{11}X_{1ij})W_{1j} + u_{0j} + u_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

- u_{0j} คือ ค่าเบี่ยงเบนของค่าคาดหวังของ Y เมื่อ X และ W เท่ากับ 0 ของกลุ่มที่ j ออกจากค่าคาดหวังเฉลี่ย
- u_{1j} คือ ค่าเบี่ยงเบนของความชันของ X_1 ที่มีต่อ Y เมื่อ W เท่ากับ 0 ของกลุ่มที่ j ออกจากค่าความชันเฉลี่ย

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ

- วิธีการทดสอบจุดตัดอย่างง่ายและความชันอย่างง่าย สามารถใช้วิธีของ Bauer & Curran (2005) โดยให้

$$\mathbf{y} = [\gamma_{00} \quad \gamma_{01} \quad \gamma_{10} \quad \gamma_{11}]'$$

- สร้างสัมประสิทธิ์เพื่อคูณกับ $\mathbf{y}$ เพื่อใช้คำนวณจุดตัดและความชันอย่างง่าย

$$b = \mathbf{c}'\mathbf{y} = [c_{00} \quad c_{01} \quad c_{10} \quad c_{11}] \begin{bmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{bmatrix}$$

- หรือ $b = c_{00}\gamma_{00} + c_{01}\gamma_{01} + c_{10}\gamma_{10} + c_{11}\gamma_{11}$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ

- ให้ w เป็นตัวแปรกำกับ และ X เป็นตัวแปรอิสระ

$$\hat{Y}_{ij|w_{1j}=w} = (\gamma_{00}(1) + \gamma_{01}w) + (\gamma_{10}(1) + \gamma_{11}w)X_{1ij}$$

- ถ้าทดสอบจุดตัดอย่างง่าย ค่าที่เราต้องการทดสอบ คือ $b = \gamma_{00}(1) + \gamma_{01}w$ ว่าแตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่
 - ดังนั้น จุดตัดอย่างง่าย: $\mathbf{c} = [1 \quad w \quad 0 \quad 0]'$
- ถ้าทดสอบความชันอย่างง่าย ค่าที่เราต้องการทดสอบคือ $b = \gamma_{10}(1) + \gamma_{11}w$ ว่าแตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่
 - ดังนั้น ความชันอย่างง่าย: $\mathbf{c} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad w]'$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ

- ให้ W เป็นตัวแปรกำกับ และ X เป็นตัวแปรอิสระ

$$\hat{Y}_{ij|X_{1ij}=x} = (\gamma_{00}(1) + \gamma_{10}x) + (\gamma_{01}(1) + \gamma_{11}x)W_{1j}$$

- ถ้าทดสอบจุดตัดอย่างง่าย ค่าที่เราต้องการทดสอบ คือ $b = \gamma_{00}(1) + \gamma_{10}x$ ว่าแตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่
 - ดังนั้น จุดตัดอย่างง่าย: $\mathbf{c} = [1 \quad 0 \quad x \quad 0]'$
- ถ้าทดสอบความชันอย่างง่าย ค่าที่เราต้องการทดสอบคือ $b = \gamma_{01}(1) + \gamma_{11}x$ ว่าแตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่
 - ดังนั้น ความชันอย่างง่าย: $\mathbf{c} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad x]'$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ

- วิธีการหาค่าความผิดพลาดมาตรฐานของจุดตัดและความชันอย่างง่ายสามารถคำนวณได้จากสูตรดังนี้

$$SE(b) = \sqrt{\mathbf{c}'\text{Var}(\mathbf{y})\mathbf{c}} \quad z = \frac{b}{SE(b)}$$

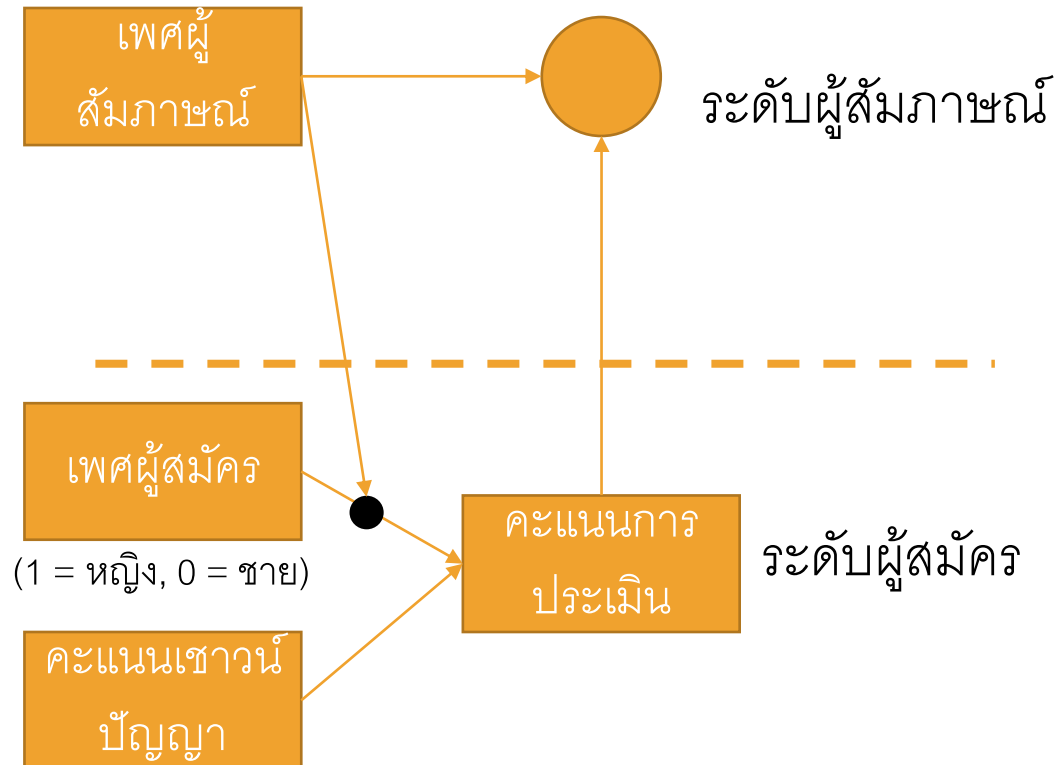
- วิธีการคำนวณรูปแบบนี้ สามารถแผ่ขยายได้ทั้งปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ (Cross-level Interaction), ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในระดับที่ 1, และ ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในระดับที่ 2

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ

- วิธีการนี้ เป็นวิธีการเดียวกับที่แสดงใน Online Calculator ในเว็บไซต์ <http://www.quantpsy.org/interact/> ซึ่งสามารถเอาผลการวิเคราะห์ไปใส่ในเครื่องคิดเลข หรือคำนวณผ่าน R ได้ดังในการสอนนี้
- ใน Online Calculator ถ้าตัวแปรต้นตัวหนึ่งอยู่ระดับที่ 1 แต่อีกตัวหนึ่งอยู่ระดับที่ 2 ให้ใช้ Case ที่ 3 ของ Hierarchical Linear Model (HLM) 2 ระดับ

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ

ทดสอบอคติของผู้สัมภาษณ์ ว่าผู้สัมภาษณ์
เพศเดียวกัน จะมีอคติในการประเมิน
เพศเดียวกันสูงขึ้นหรือไม่



- จากโมเดลความชันแบบสุ่ม ที่ทราบว่าอิทธิพลของเพศของผู้สมัครแตกต่างกันระหว่างกลุ่ม
- ทดสอบว่าเพศของผู้สัมภาษณ์ มีผลต่อจุดตัดแกน Y หรือไม่ กล่าวคือ ผู้สัมภาษณ์เพศชายและเพศหญิงโดยเฉลี่ยแล้ว ให้คะแนนแตกต่างกันหรือไม่ (โมเดลที่ไม่มีปฏิสัมพันธ์)

```
> out2m1 <- lmer(score ~ 1 + eesex + I(iq - 100) + (1 + eesex|erid), data=dat2, REML=FALSE)
> out2m1a <- lmer(score ~ 1 + eesex + I(iq - 100) + ersex + (1 + eesex|erid), data=dat2, REML=FALSE)
> anova(out2m1, out2m1a)
Data: dat2
Models:
out2m1: score ~ 1 + eesex + I(iq - 100) + (1 + eesex | erid)
out2m1a: score ~ 1 + eesex + I(iq - 100) + ersex + (1 + eesex | erid)
      Df    AIC    BIC logLik deviance Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out2m1   7 61669 61719 -30828    61655
out2m1a  8 61669 61727 -30826    61653  2.0971    1    0.1476
```

- เปรียบเทียบทั้งสองโมเดล พบว่าไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ กล่าวคือ ผู้สัมภาษณ์เพศชายให้คะแนนไม่แตกต่างจากเพศหญิงอย่างมีนัยสำคัญ เมื่อควบคุมเพศของผู้สมัครและคะแนนเขาวนปัญญาแล้ว

- อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ไม่พบความแตกต่างกันระหว่างผู้สัมภาษณ์ แต่อาจพบผลปฏิสัมพันธ์ระหว่างเพศผู้สัมภาษณ์และเพศของผู้สมัครได้

```
> out2mlb <- lmer(score ~ 1 + eesex + I(iq - 100) + ersex + eesex:ersex
+ (1 + eesex|erid), data=dat2, REML=FALSE)
> anova(out2mla, out2mlb)
Data: dat2
Models:
out2mla: score ~ 1 + eesex + I(iq - 100) + ersex + (1 + eesex | erid)
out2mlb: score ~ 1 + eesex + I(iq - 100) + ersex + eesex:ersex + (1 +
out2mlb: eesex | erid)
      Df    AIC    BIC logLik deviance Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out2mla  8 61669 61727 -30826    61653
out2mlb  9 61641 61706 -30812    61623 29.87    1 4.619e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

- เพศผู้สมัครและเพศผู้สัมภาษณ์มีปฏิสัมพันธ์กันต่อคะแนนการประเมินอย่างมีนัยสำคัญ

```
> summary(out2mlb)
Linear mixed model fit by maximum likelihood ['lmerMod']
Formula: score ~ 1 + eesex + I(iq - 100) + ersex + eesex:ersex + (1 + eesex | erid)
Data: dat2
```

AIC	BIC	logLik	deviance	df.resid
61641.0	61705.9	-30811.5	61623.0	9991

Scaled residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-3.7413	-0.6367	-0.0048	0.6410	3.4320

Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.	Corr
erid	(Intercept)	20.1152	4.4850	
	eesex	0.7979	0.8933	0.12
	Residual	21.7645	4.6652	

Number of obs: 10000, groups: erid, 1000

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	t value	
(Intercept)	75.538700	0.221217	341.469	
eesex	-0.413234	0.137868	-2.997	sig
I(iq - 100)	0.029418	0.003299	8.918	sig
ersex	0.009887	0.312847	0.032	Not sig
eesex:ersex	1.073648	0.194981	5.506	sig

$$\text{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .12$$

$$\text{Var}(u_{0j}) = 20.12$$

$$\text{Var}(u_{1j}) = 0.80$$

$$\text{Var}(e_{ij}) = 21.76$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 100) + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = 75.54 + 0.01W_{1j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = -0.41 + 1.07W_{1j} + u_{1j}; \beta_{2j} = 0.03$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 100) + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = 75.54 + 0.01W_{1j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = -0.41 + 1.07W_{1j} + u_{1j}; \beta_{2j} = 0.03$$

$$\text{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .12$$

$$\text{Var}(u_{0j}) = 20.12$$

$$\text{Var}(u_{1j}) = 0.80$$

$$\text{Var}(e_{ij}) = 21.76$$

$$Y_{ij} = 75.54 - 0.41X_{1ij} + 0.01W_{1j} + 1.07X_{1ij}W_{1j} + 0.03(X_{2ij} - 100) + u_{0j} + u_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

ผู้สมัครเพศชายมีคะแนนเขาวนัปัญญา 100 คะแนน ได้รับการประเมินจากผู้
สัมภาษณ์เพศชาย 75.54 แต้ม

ผู้สัมภาษณ์เพศชาย ประเมินผู้สมัครเพศหญิงน้อยกว่าเพศชาย 0.41 แต้ม เมื่อควบคุม
คะแนนเขาวนัปัญญาให้คงที่

เมื่อควบคุมระดับเขาวนัปัญญาของผู้สมัครให้คงที่ ผู้สมัครเพศชายจะได้รับคะแนนจาก
ผู้สัมภาษณ์เพศหญิงมากกว่าผู้สัมภาษณ์เพศชาย 0.01 แต้ม

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 100) + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = 75.54 + 0.01W_{1j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = -0.41 + 1.07W_{1j} + u_{1j}; \beta_{2j} = 0.03$$

$$\text{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .12$$

$$\text{Var}(u_{0j}) = 20.12$$

$$\text{Var}(u_{1j}) = 0.80$$

$$\text{Var}(e_{ij}) = 21.76$$

$$Y_{ij} = 75.54 - 0.41X_{1ij} + 0.01W_{1j} + 1.07X_{1ij}W_{1j} + 0.03(X_{2ij} - 100) + u_{0j} + u_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

เมื่อควบคุมระดับเซาว์นปัญญาของผู้สมัครให้คงที่ ความแตกต่างของคะแนนประเมินผู้สมัครเพศหญิงและชาย ในผู้สัมภาษณ์เพศหญิงมากกว่าผู้สัมภาษณ์เพศชาย 1.07 แต้ม เมื่อผู้สมัครมีคะแนนเซาว์นปัญญาเพิ่มขึ้น 1 แต้ม คะแนนประเมินที่ได้รับจะเพิ่มขึ้น 0.03 แต้ม เมื่อควบคุมเพศของผู้สมัครและเพศผู้สัมภาษณ์ให้คงที่

ความแปรปรวนและสหสัมพันธ์ระหว่างค่าคงเหลือระดับกลุ่ม จะไม่ตีความหมายในที่นี้ เนื่องจากเมื่อมีตัวแปรระดับกลุ่มแล้ว การแปลความหมายค่าคงเหลือจะยาก และนำไปใช้ในงานวิจัยไม่ค่อยได้

$$\hat{Y} = 75.54 - 0.41X_{1ij} + 0.01W_{1j} + 1.07X_{1ij}W_{1j}$$

หาอิทธิพลของเพศของผู้สมัคร เมื่อเพศของผู้สมัครเป็นตัวแปรกำกับ

$$\hat{Y} = (75.54 + 0.01W_{1j}) + (-0.41 + 1.07W_{1j})X_{1ij}$$

ผู้สมัคร	จุดตัดแบบง่าย	ความชันแบบง่าย	ผู้สมัครชาย	ผู้สมัครหญิง
0 (ชาย)	$75.54 + (0.01 \times 0) = 75.54$	$-0.41 + (1.07 \times 0) = -0.41$	75.54	75.13
1 (หญิง)	$75.54 + (0.01 \times 1) = 75.55$	$-0.41 + (1.07 \times 1) = 0.67$	75.55	76.21

หาอิทธิพลของเพศของผู้สมัคร เมื่อเพศของผู้สมัครเป็นตัวแปรกำกับ

$$\hat{Y} = (75.54 - 0.41X_{1ij}) + (0.01 + 1.07X_{1ij})W_{1j}$$

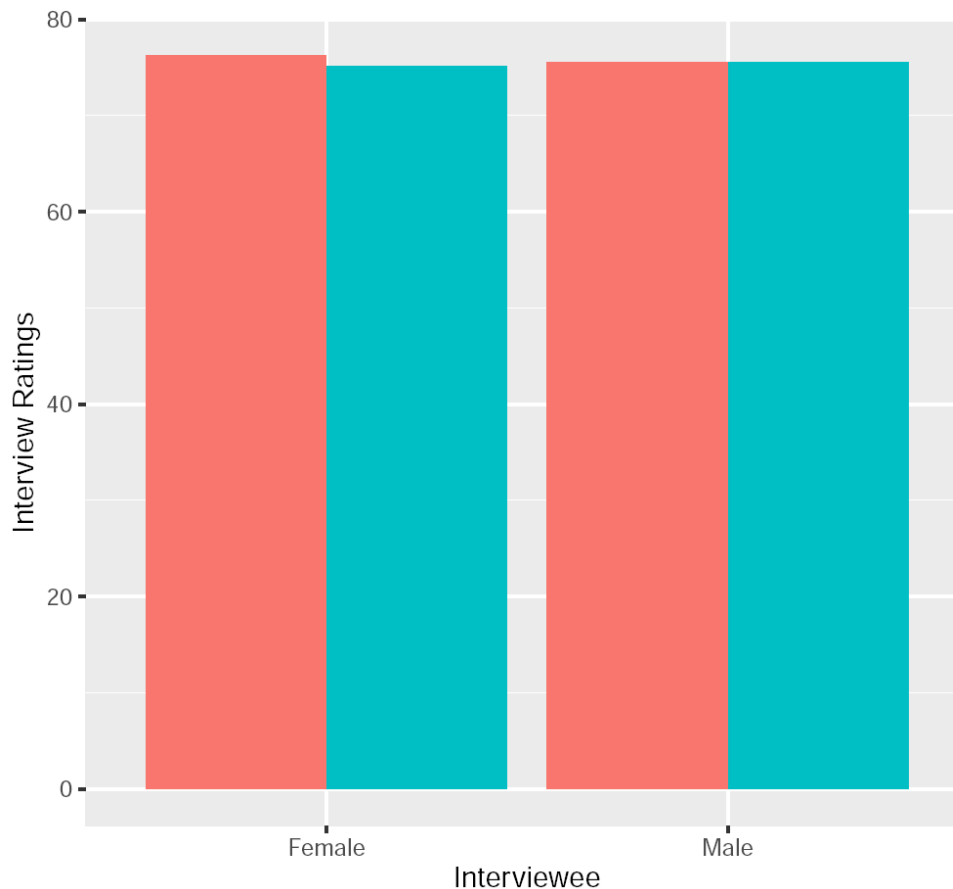
ผู้สมัคร	จุดตัดแบบง่าย	ความชันแบบง่าย	ผู้สมัครชาย	ผู้สมัครหญิง
0 (ชาย)	$75.54 + (-0.41 \times 0) = 75.54$	$0.01 + (1.07 \times 0) = 0.01$	75.54	75.55
1 (หญิง)	$75.54 + (-0.41 \times 1) = 75.13$	$0.01 + (1.07 \times 1) = 1.09$	75.13	76.21

```

> library(ggplot2)
> eesex <- c("Male", "Male", "Female", "Female")
> ersex <- c("Male", "Female", "Male", "Female")
> ratings <- c(75.54, 75.55, 75.13, 76.21)
> mydat <- data.frame(eesex, ersex, ratings)
>
> ggplot(mydat, aes(factor(eesex), ratings, fill = ersex)) +
+   geom_bar(stat="identity", position = "dodge") +
+   labs(x = "Interviewee", y = "Interview Ratings", fill = "Interviewer")

```

ผู้สมัครเพศหญิง
จะได้รับคะแนนจากผู้
สัมภาษณ์เพศหญิง
มากกว่าเพศชาย



ผู้สมัครเพศชาย จะ
ได้รับคะแนนจากผู้
สัมภาษณ์เพศชาย
พอๆ กับเพศหญิง

หาอิทธิพลของเพศของผู้สมัคร เมื่อเพศของผู้สัมภาษณ์เป็นตัวแปรกำกับ

$$\hat{Y} = (75.54 + 0.01W_{1j}) + (-0.41 + 1.07W_{1j})X_{1ij}$$

ผู้สัมภาษณ์	จุดตัดแบบง่าย	ความชันแบบง่าย	ผู้สมัครชาย	ผู้สมัครหญิง
0 (ชาย)	$75.54 + (0.01 \times 0) = 75.54$	$-0.41 + (1.08 \times 0) = -0.41$	75.54	75.13
1 (หญิง)	$75.54 + (0.01 \times 1) = 75.55$	$-0.41 + (1.08 \times 1) = 0.67$	75.55	76.21

> coef(sumout2)

```

              Estimate
(Intercept) 75.538699775
eesex       -0.413234273
I(iq - 100)  0.029417726
ersex        0.009887427
eesex:ersex  1.073647647

```

จุดตัดอย่างง่าย	ความชันอย่างง่าย
1	0
0	1
0	0
0, 1	0
0	0, 1

การหาระดับนัยสำคัญของจุดตัดแบบง่ายหรือความชันแบบง่าย
ต้องใช้ผลการวิเคราะห์มาคำนวณต่อ ยกตัวอย่างทดสอบความแตกต่าง
ของคะแนนประเมินระหว่างผู้สมัครเพศชายและหญิงภายในผู้สัมภาษณ์หญิง

ผู้สัมภาษณ์	จุดตัดแบบง่าย	ความชันแบบง่าย
0 (ชาย)	$75.54 + (0.01 \times 0) = 75.54$	$-0.41 + (1.08 \times 0) = -0.41$
1 (หญิง)	$75.54 + (0.01 \times 1) = 75.55$	$-0.41 + (1.08 \times 1) = 0.67$

$$\mathbf{y} = [75.54 \quad -0.41 \quad 0.03 \quad 0.01 \quad 1.07]'$$

$$\mathbf{c} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]'$$

$$b = \mathbf{c}'\mathbf{y} = 0.67$$

```
> psi <- coef(sumout2)[,"Estimate"]
> cvec1 <- c(0, 1, 0, 0, 1)
> t(cvec1) %*% psi
      [,1]
[1,] 0.6604134
```

การหาระดับนัยสำคัญของจุดตัดแบบง่ายหรือความชันแบบง่าย
ต้องใช้ผลการวิเคราะห์มาคำนวณต่อ ยกตัวอย่างทดสอบความแตกต่าง
ของคะแนนประเมินระหว่างผู้สมัครเพศชายและหญิงภายในผู้สัมภาษณ์หญิง

ในการหาความผิดพลาดมาตรฐาน ต้องใช้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของค่า
สัมประสิทธิ์ถดถอย

```
> vcov(sumout2)
5 x 5 Matrix of class "dpoMatrix"
      (Intercept)      eesex  I(iq - 100)      ersex  eesex:ersex
(Intercept)  4.893677e-02 -7.705851e-03 -2.256546e-06 -4.893679e-02  7.706863e-03
eesex        -7.705851e-03  1.900753e-02  4.312162e-07  7.705854e-03 -1.900772e-02
I(iq - 100)  -2.256546e-06  4.312162e-07  1.088197e-05  2.325794e-06 -5.309106e-06
ersex        -4.893679e-02  7.705854e-03  2.325794e-06  9.787311e-02 -1.541266e-02
eesex:ersex   7.706863e-03 -1.900772e-02 -5.309106e-06 -1.541266e-02  3.801761e-02
```

จาก $SE(b) = \sqrt{\mathbf{c}'\text{Var}(\mathbf{y})\mathbf{c}}$

```
> vpsi <- vcov(sumout2)
> sqrt(t(cvec1) %*% vpsi %*% cvec1)
1 x 1 Matrix of class "dgeMatrix"
      [,1]
[1,] 0.1378757
```

$$z = \frac{b}{SE(b)} = \frac{0.660}{0.138} = 4.79$$

ด้วยค่า z นี้ แสดงว่าผู้สัมภาษณ์หญิงประเมิน
ผู้สมัครหญิงมากกว่าชายอย่างมีนัยสำคัญ

R สามารถทดสอบจุดตัดแบบง่ายและความชันแบบง่ายได้หลายๆ ตัวพร้อมกัน

```
> psi <- coef(sumout2)[,"Estimate"]
> vpsi <- vcov(sumout2)
> cvec1 <- c(1, 0, 0, 0, 0)
> cvec2 <- c(1, 0, 0, 1, 0)
> cvec3 <- c(0, 1, 0, 0, 0)
> cvec4 <- c(0, 1, 0, 0, 1)
> cmat <- cbind(cvec1, cvec2, cvec3, cvec4)
> est <- t(cmat) %*% psi
> se <- sqrt(diag(t(cmat) %*% vpsi %*% cmat))
> zval <- est/se
> pval <- round(pnorm(-abs(zval)) * 2, 6)
> cbind(est, se, zval, pval)
```

		se			
cvec1	75.5386998	0.2212166	341.469434	0.000000	
cvec2	75.5485872	0.2212155	341.515761	0.000000	
cvec3	-0.4132343	0.1378678	-2.997323	0.002724	
cvec4	0.6604134	0.1378757	4.789920	0.000002	

เพศผู้ สัมภาษณ์	จุดตัดแบบง่าย			ความชันแบบง่าย		
	b	SE	z	b	SE	z
ชาย	75.53	0.22	341.47**	-0.41	0.14	-3.00**
หญิง	75.54	0.22	341.52**	0.66	0.14	4.79**

ผู้สัมภาษณ์ชายประเมิน
ผู้สมัครหญิงน้อยกว่าชาย
อย่างมีนัยสำคัญ

ผู้สัมภาษณ์หญิงประเมิน
ผู้สมัครหญิงมากกว่าชาย
อย่างมีนัยสำคัญ

หาอิทธิพลของเพศของผู้สัมภาษณ์ เมื่อเพศของผู้สมัครเป็นตัวแปรกำกับ

$$\hat{Y} = (75.54 - 0.41X_{1ij}) + (0.01 + 1.07X_{1ij})W_{1j}$$

ผู้สมัคร	จุดตัดแบบง่าย	ความชันแบบง่าย	ผู้สัมภาษณ์ชาย	ผู้สัมภาษณ์หญิง
0 (ชาย)	$75.54 + (-0.41 \times 0) = 75.54$	$0.01 + (1.07 \times 0) = 0.01$	75.54	75.55
1 (หญิง)	$75.54 + (-0.41 \times 1) = 75.13$	$0.01 + (1.07 \times 1) = 1.09$	75.13	76.21

> coef(sumout2)

```

              Estimate
(Intercept) 75.538699775
eesex       -0.413234273
I(iq - 100)  0.029417726
ersex        0.009887427
eesex:ersex  1.073647647

```

จุดตัดอย่างง่าย	ความชันอย่างง่าย
1	0
0, 1	0
0	0
0	1
0	0, 1

```

> cvec1 <- c(1, 0, 0, 0, 0)
> cvec2 <- c(1, 1, 0, 0, 0)
> cvec3 <- c(0, 0, 0, 1, 0)
> cvec4 <- c(0, 0, 0, 1, 1)
> cmat <- cbind(cvec1, cvec2, cvec3, cvec4)
> est <- t(cmat) %**% psi
> se <- sqrt(diag(t(cmat) %**% vpsi %**% cmat))
> zval <- est/se
> pval <- round(pnorm(-abs(zval)) * 2, 6)
> cbind(est, se, zval, pval)

```

	se			
cvec1	75.538699775	0.2212166	341.46943372	0.000000
cvec2	75.125465501	0.2291999	327.77266944	0.000000
cvec3	0.009887427	0.3128468	0.03160469	0.974787
cvec4	1.083535075	0.3241379	3.34282094	0.000829

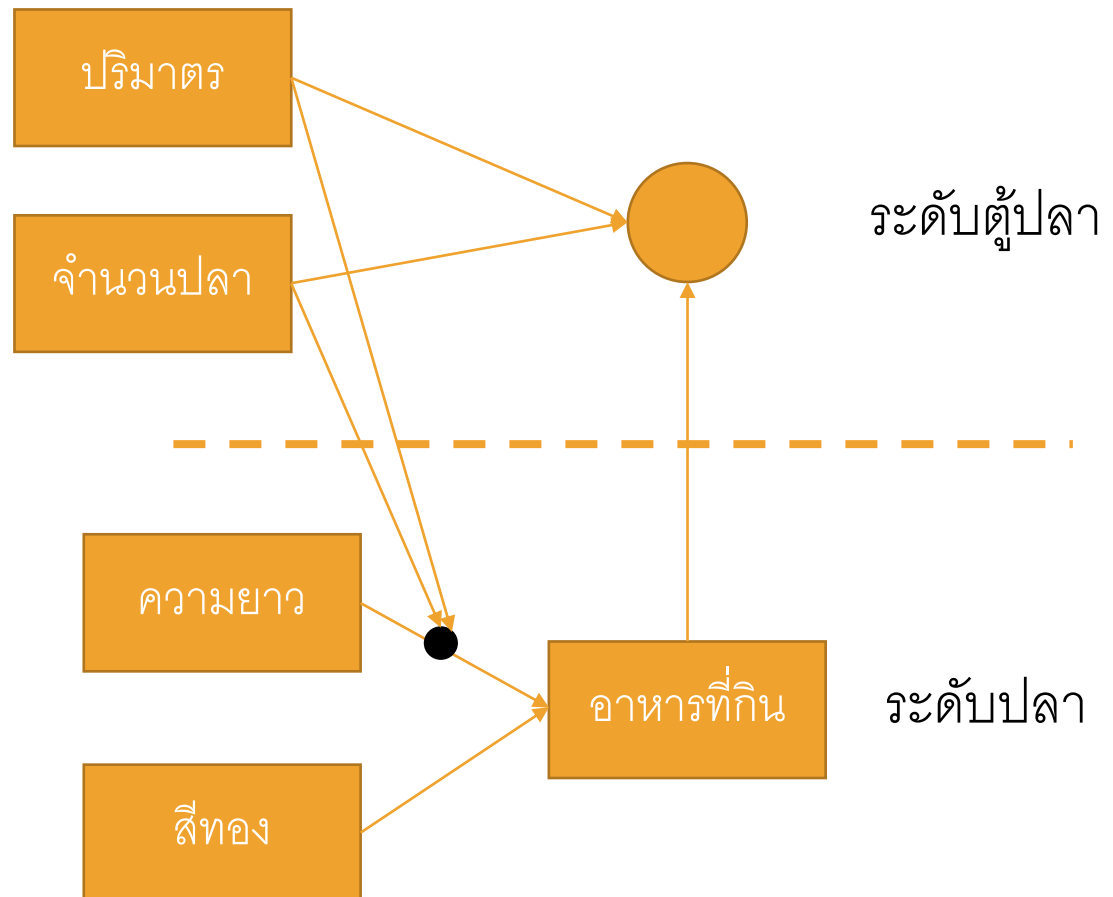
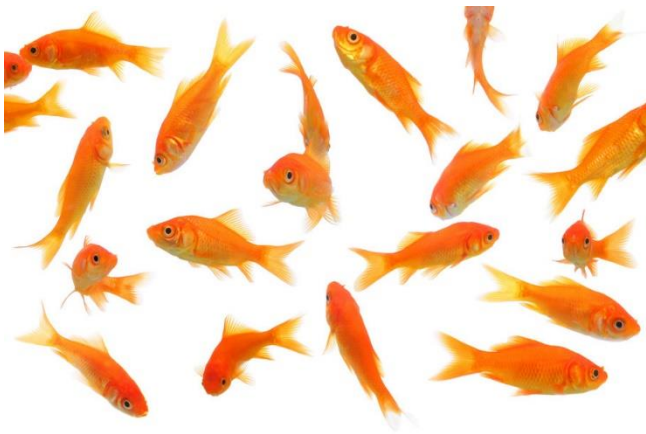
เพศ ผู้สมัคร	จุดตัดแบบง่าย			ความชันแบบง่าย		
	<i>b</i>	<i>SE</i>	<i>z</i>	<i>b</i>	<i>SE</i>	<i>z</i>
ชาย	75.54	0.22	341.47**	0.01	0.31	0.03
หญิง	75.13	0.23	327.77**	1.08	0.32	3.34**

ผู้สมัครเพศชายได้รับการประเมิน
จากผู้สัมภาษณ์เพศชายและ
หญิงไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

ผู้สัมภาษณ์เพศหญิงประเมินผู้สมัคร
เพศหญิงมากกว่าผู้สัมภาษณ์เพศชาย
อย่างมีนัยสำคัญ

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ

ตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ระหว่าง
ความยาวของปลาและอาหารที่กิน
เปลี่ยนแปลงไปตามปริมาณของ
ตู้ปลา หรือจำนวนปลาในตู้หรือไม่



จากโมเดลความชันแบบสุ่ม ที่ทราบว่าอิทธิพลของความยาวปลาแตกต่างกันระหว่างกลุ่ม

```
> out1m1 <- lmer(consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + (1 + I(length - 15)|groupid),  
+ data=dat1, REML=FALSE, control = lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead"))
```

ทดสอบว่าปริมาตรและจำนวนปลาในตู้ปลา มีผลต่อจุดตัดแกน Y หรือไม่
(โมเดลที่ไม่มีปฏิสัมพันธ์)

```
> out1m1intcept <- lmer(consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + I(volume - 1) + I(nfish - 8)  
+ (1 + I(length - 15)|groupid), data=dat1, REML=FALSE,  
+ control = lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead"))
```

เปรียบเทียบทั้งสองโมเดลพบว่า การเพิ่มปริมาตรตู้ปลาและปริมาณปลาในตู้ สามารถ
อธิบายการกินอาหารปลาได้มากขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ

```
> anova(out1m1, out1m1intcept)
Data: dat1
Models:
out1m1: consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + (1 + I(length - 15) |
out1m1: groupid)
out1m1intcept: consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + I(volume - 1) + I(nfish -
out1m1intcept: 8) + (1 + I(length - 15) | groupid)

            Df      AIC      BIC    logLik deviance   Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out1m1         7 4109.4  4142.3  -2047.7   4095.4
out1m1intcept  9 4072.2  4114.4  -2027.1   4054.2  41.214      2 1.123e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

ทำนายความชันของความยาวปลา ด้วยปริมาตรของตู้ปลาและจำนวนปลาในตู้ (มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างความยาวปลาและปริมาตรตู้ปลา และระหว่างความยาวปลาและจำนวนปลาในตู้)

```
> out1m1slope <- lmer(consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + I(volume - 1) + I(nfish - 8)
+ I(length - 15):I(volume - 1) + I(length - 15):I(nfish - 8)
+ (1 + I(length - 15)|groupid),
+ data=dat1, REML=FALSE, control = lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead"))
```

เปรียบเทียบระหว่างโมเดลที่มีปฏิสัมพันธ์และไม่มีปฏิสัมพันธ์

```
> anova(out1m1intcept, out1m1slope)
Data: dat1
Models:
out1m1intcept: consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + I(volume - 1) + I(nfish - 8) + (1 + I(length - 15) | groupid)
out1m1slope: consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + I(volume - 1) + I(nfish - 8) + I(length - 15):I(volume - 1) + I(length - 15):I(nfish - 8) + (1 + I(length - 15) | groupid)

```

	Df	AIC	BIC	logLik	deviance	Chisq	Chi	Df	Pr(>Chisq)
out1m1intcept	9	4072.2	4114.4	-2027.1	4054.2				
out1m1slope	11	4070.8	4122.5	-2024.4	4048.8	5.3731		2	0.06811 .

```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างความยาวปลาและปริมาตรตู้ปลา และระหว่างความยาวปลาและจำนวนปลาในตู้ มีผลในการทำนายปริมาณการกินอาหารของปลาไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

```
> summary(out1m1slope)
Linear mixed model fit by maximum likelihood ['lmerMod']
Formula: consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + I(volume - 1) + I(nfish - 8) + I(volume - 1):I(length - 15) + I(volume - 1):I(nfish - 8) + (1 + I(length - 15) | groupid)
Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")
```

AIC	BIC	logLik	deviance	df.resid
4069.5	4121.2	-2023.8	4047.5	800

Scaled residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-3.2567	-0.6581	0.0594	0.6379	2.7998

Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.	Corr
groupid	(Intercept)	12.40581	3.5222	
	I(length - 15)	0.01197	0.1094	0.71
Residual		5.98557	2.4465	

Number of obs: 811, groups: groupid, 100

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	t value	
(Intercept)	44.11875	0.77189	57.157	
I(length - 15)	0.91562	0.02868	31.927	
goldcolor	-0.48621	0.18321	-2.654	
I(volume - 1)	15.45370	2.02245	7.641	
I(nfish - 8)	-1.20532	0.21944	-5.493	
I(length - 15):I(volume - 1)	0.18782	0.08008	2.345	sig
I(volume - 1):I(nfish - 8)	-0.43955	0.36479	-1.205	Not sig

ถ้าตัวแปรทั้งสอง เป็นตัวแปรที่จัดชุด
เดียวกันได้ (เช่น ตัวแปรจัดกลุ่มแบ่งเป็น
ตัวแปรดัมมี่ ชุดตัวแปรบุคลิกภาพ 5 แบบ)
ควรเชื่อผลการวิเคราะห์รวม
ถ้าผลการวิเคราะห์รวมไม่ถึงระดับ
นัยสำคัญ ก็ไม่ควรไปต่อ

อย่างไรก็ตาม เมื่อมาดูปฏิสัมพันธ์ที่ละคู่พบว่าตัวหนึ่งถึง
ระดับนัยสำคัญ และอีกตัวหนึ่งไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

ในที่นี้ ความเป็นชุดยังไม่
ชัดเจน เพื่อใช้ในการสอน จึง
มองปฏิสัมพันธ์ทั้งสอง
แยกกันโดยนำปฏิสัมพันธ์กับ
จำนวนปลาออก

ทำนายความชันของปลาด้วยปริมาตรของตู้ปลาเพียงอย่างเดียว

```
> out1mltrimmed <- lmer(consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + I(volume - 1) + I(nfish - 8)
+                               + I(volume - 1):I(length - 15) + (1 + I(length - 15)|groupid),
+                               data=dat1, REML=FALSE, control = lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead"))
```

เปรียบเทียบระหว่างโมเดลที่มีปฏิสัมพันธ์และไม่มีปฏิสัมพันธ์

```
> anova(out1mlintcept, out1mltrimmed)
Data: dat1
Models:
out1mlintcept: consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + I(volume - 1) + I(nfish - 8) + (1 + I(length - 15) | groupid)
out1mltrimmed: consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + I(volume - 1) + I(nfish - 8) + I(volume - 1):I(length - 15) + (1 + I(length - 15) | groupid)

            Df    AIC    BIC  logLik deviance  Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out1mlintcept  9 4072.2 4114.4 -2027.1   4054.2
out1mltrimmed 10 4068.9 4115.9 -2024.5   4048.9  5.2431    1 0.02203 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

พบว่าปริมาตรของตู้ปลากำกับอิทธิพลของความยาวปลาที่มีต่อการกินอาหารของปลา

```
> summary(out1mltrimmed)
Linear mixed model fit by maximum likelihood ['lmerMod']
Formula: consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + I(volume - 1) + I(nfish - 8) + I(volume - 1):I(length - 15) + (1 + I(length - 15) | groupid)
Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")
```

AIC	BIC	logLik	deviance	df.resid
4068.9	4115.9	-2024.5	4048.9	801

Scaled residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-3.2580	-0.6570	0.0492	0.6325	2.8096

Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.	Corr
groupid	(Intercept)	12.36109	3.5158	
	I(length - 15)	0.01178	0.1085	0.67
	Residual	5.98870	2.4472	

Number of obs: 811, groups: groupid, 100

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	t value	
(Intercept)	43.72636	0.69806	62.640	
I(length - 15)	0.91655	0.02861	32.038	sig
goldcolor	-0.49156	0.18333	-2.681	sig
I(volume - 1)	14.91728	1.97460	7.555	sig
I(nfish - 8)	-1.09049	0.19743	-5.523	sig
I(length - 15):I(volume - 1)	0.19096	0.07989	2.390	sig

$$\text{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .67$$

$$\text{Var}(u_{0j}) = 12.36$$

$$\text{Var}(u_{1j}) = 0.012$$

$$\text{Var}(e_{ij}) = 5.99$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 15) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = 43.73 + 14.92(W_{1j} - 1) - 1.09(W_{2j} - 8) + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = 0.92 + 0.19(W_{1j} - 1) + u_{1j}; \beta_{2j} = -0.49$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 15) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$

$$\text{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .67$$

$$\beta_{0j} = 43.73 + 14.92(W_{1j} - 1) - 1.09(W_{2j} - 8) + u_{0j}$$

$$\text{Var}(u_{0j}) = 12.36$$

$$\beta_{1j} = 0.92 + 0.19(W_{1j} - 1) + u_{1j}; \beta_{2j} = -0.49$$

$$\text{Var}(u_{1j}) = 0.012$$

$$\text{Var}(e_{ij}) = 5.99$$

$$Y_{ij} = 43.73 + 0.92(X_{1ij} - 15) + 14.92(W_{1j} - 1) + 0.19(W_{1j} - 1)(X_{1ij} - 15) - 0.49X_{2ij} - 1.09(W_{2j} - 8) + u_{0j} + u_{1j}(X_{1ij} - 15) + e_{ij}$$

ปลาที่ความยาว 15 ซม. ไม่ได้มีสีทองแท้ ที่อยู่ในตู้ปลาที่ปริมาตรเท่ากับ 1 ลบ.ม. มีจำนวนปลา 8 ตัว เท่ากับ 43.73 เม็ดต่อวัน

ในตู้ปลาที่มีปริมาตร 1 ลบ.ม. เมื่อปลามีความยาวเพิ่มขึ้น 1 ซม. อาหารที่กินจะเพิ่มขึ้น 0.92 เม็ดต่อวัน เมื่อควบคุมความยาวของปลา และจำนวนปลาในตู้ในคงที่

เทียบกับระหว่างปลาที่มีความยาว 15 ซม. ที่มีสีเดียวกัน และจำนวนปลาในตู้เท่ากัน เมื่อตู้ปลา มีขนาดเพิ่มขึ้น 1 ลบ.ม. อาหารที่ปลาตัวนี้กินจะเพิ่มขึ้น 14.92 เม็ดต่อวัน

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 15) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$

$$\text{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .67$$

$$\beta_{0j} = 43.73 + 14.92(W_{1j} - 1) - 1.09(W_{2j} - 8) + u_{0j}$$

$$\text{Var}(u_{0j}) = 12.36$$

$$\beta_{1j} = 0.92 + 0.19(W_{1j} - 1) + u_{1j}; \beta_{2j} = -0.49$$

$$\text{Var}(u_{1j}) = 0.012$$

$$\text{Var}(e_{ij}) = 5.99$$

$$Y_{ij} = 43.73 + 0.92(X_{1ij} - 15) + 14.92(W_{1j} - 1) + 0.19(W_{1j} - 1)(X_{1ij} - 15) - 0.49X_{2ij} - 1.09(W_{2j} - 8) + u_{0j} + u_{1j}(X_{1ij} - 15) + e_{ij}$$

เมื่อตั้ปลา มีขนาดเพิ่มขึ้น 1 ลบ.ม. ความชันของความยาวปลาที่มีต่อการกินอาหารปลา เพิ่มขึ้น 0.19 เม็ดต่อวัน เมื่อควบคุมสีของปลา และจำนวนปลาในตั้ให้คงที่

ปลาสีทองไม่แท้ มีการกินอาหารมากกว่าปลาสีทองแท้ 0.49 เม็ดต่อวัน เมื่อควบคุมความยาวปลา ปริมาตรของตั้ และจำนวนปลาในตั้ให้คงที่

เมื่อจำนวนปลาในตั้เพิ่มขึ้น 1 ตัว ปริมาณอาหารปลาที่กินต่อวันลดลง 1.09 เม็ด เมื่อควบคุมความยาวของปลา สีของปลา และปริมาตรของตั้ปลาให้คงที่

$$\hat{Y} = 43.73 + 0.92(X_{1ij} - 15) + 14.92(W_{1j} - 1) + 0.19(W_{1j} - 1)(X_{1ij} - 15)$$

หาอิทธิพลของปริมาตร เมื่อความยาวเป็นตัวแปรกำกับ

$$\hat{Y} = (43.73 + 0.92(X_{1ij} - 15)) + (14.92 + 0.19(X_{1ij} - 15))(W_{1j} - 1)$$

ความยาว	ความยาว - 15	จุดตัดแบบง่าย	ความชันแบบง่าย
9	-6	$43.73 + (0.92 \times -6) = 38.21$	$14.92 + (0.19 \times -6) = 13.78$
14	-1	$43.73 + (0.92 \times -1) = 42.81$	$14.92 + (0.19 \times -1) = 14.73$
19	4	$43.73 + (0.92 \times 4) = 47.41$	$14.92 + (0.19 \times 4) = 15.68$

หาอิทธิพลของความยาว เมื่อปริมาตรเป็นตัวแปรกำกับ

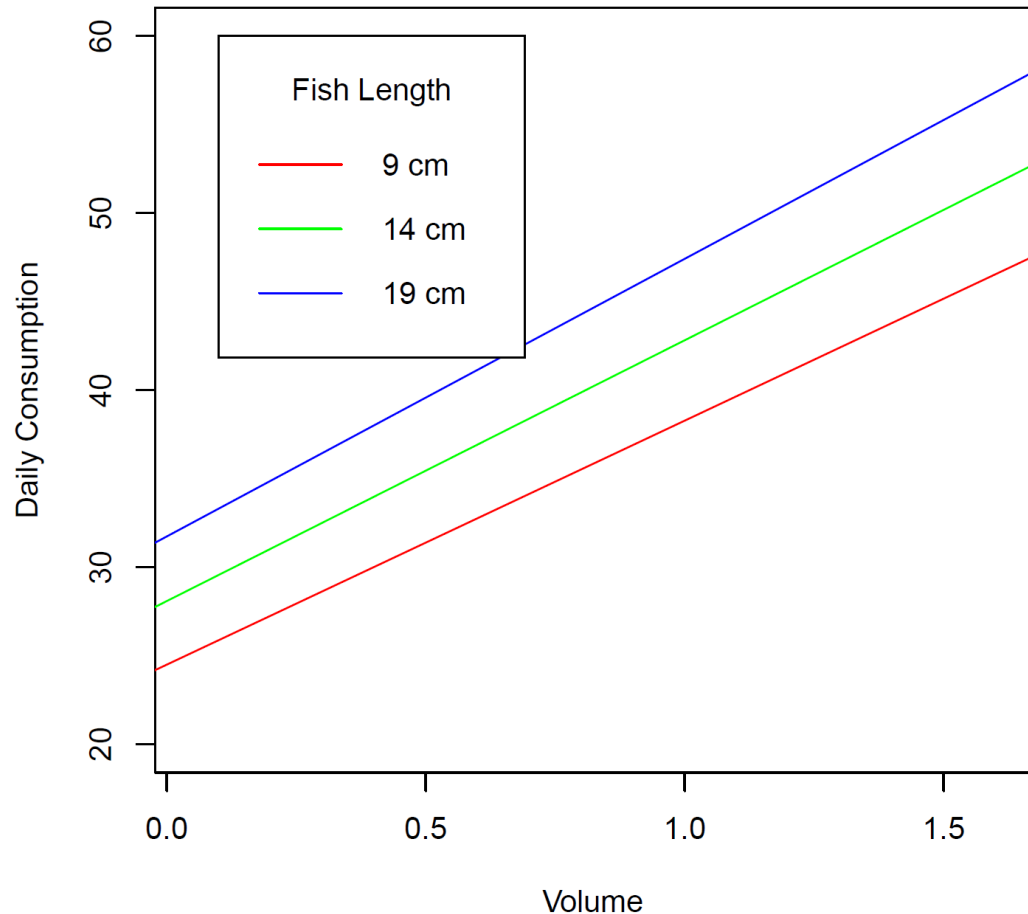
$$\hat{Y} = (43.73 + 14.92(W_{1j} - 1)) + (0.92 + 0.19(W_{1j} - 1))(X_{1ij} - 15)$$

ปริมาตร	ปริมาตร - 1	จุดตัดแบบง่าย	ความชันแบบง่าย
0.5	-0.5	$43.73 + (14.92 \times -0.5) = 36.27$	$0.92 + (0.19 \times -0.5) = 0.825$
0.8	-0.2	$43.73 + (14.92 \times -0.2) = 40.75$	$0.92 + (0.19 \times -0.2) = 0.882$
1.1	0.1	$43.73 + (14.92 \times 0.1) = 45.22$	$0.92 + (0.19 \times 0.1) = 0.939$

$$\hat{Y} = 38.21 + 13.78(W_{1j} - 1) = 38.21 - 13.78(1) + 13.78W_{1j}$$

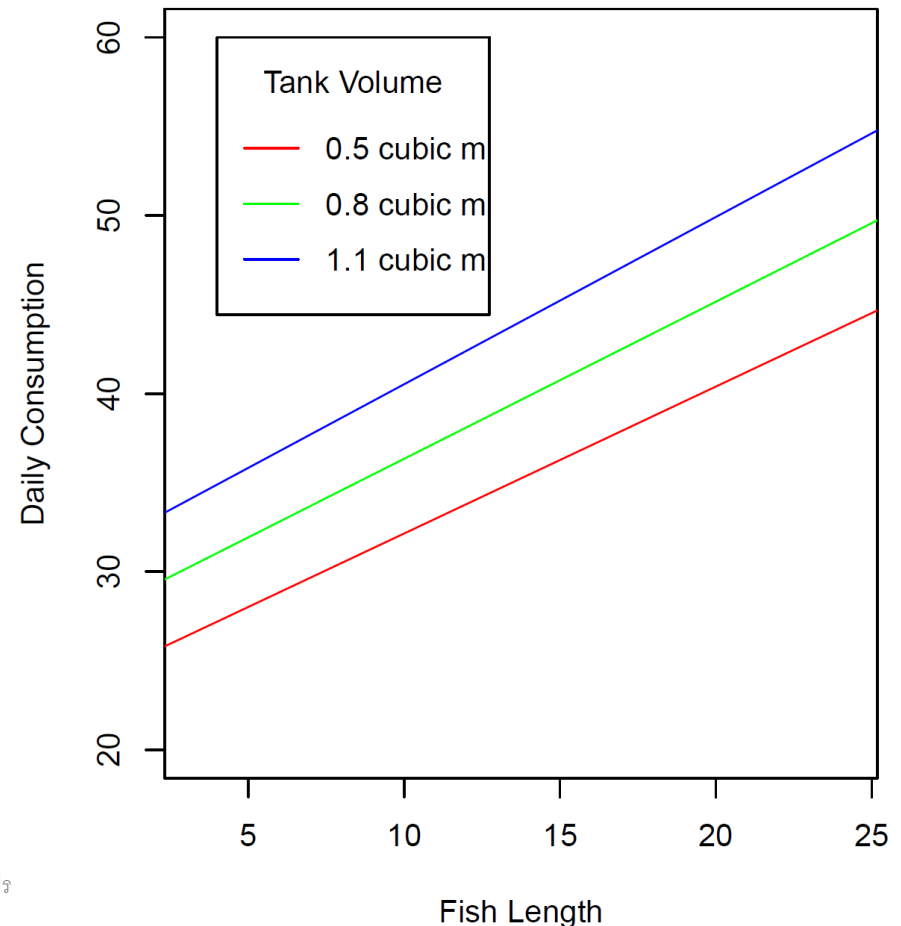
```
> plot(dat1$volume, dat1$consume, type="n", xlab="Volume", ylab="Daily Consumption")
> abline(a = 38.21 - 13.72*1, b = 13.78, col="red")
> abline(a = 42.81 - 14.73*1, b = 14.73, col="green")
> abline(a = 47.41 - 15.68*1, b = 15.68, col="blue")
> legend(0.1, 60, c("9 cm", "14 cm", "19 cm"), col=c("red", "green", "blue"),
+       lty=1, title="Fish Length")
```

เมื่อความยาวปลามากขึ้น
ความชันของปริมาตรที่มีต่อ
การกินอาหารปลาสูงขึ้น



```
> plot(dat1$length, dat1$consume, type="n", xlab="Fish Length", ylab="Daily Consumption")
> abline(a = 36.27 - 0.825*15, b = 0.825, col="red")
> abline(a = 40.75 - 0.882*15, b = 0.882, col="green")
> abline(a = 45.22 - 0.939*15, b = 0.939, col="blue")
> legend(4, 60, c("0.5 cubic m", "0.8 cubic m", "1.1 cubic m"),
+       col=c("red", "green", "blue"), lty=1, title="Tank Volume")
```

เมื่อปริมาตรของตู้ปลาสูงขึ้น
 การเพิ่มขึ้นของการกินอาหารปลา
 ยิ่งมากขึ้นเมื่อความยาวปลาเพิ่มขึ้น



หาอิทธิพลของปริมาตร เมื่อความยาวเป็นตัวแปรกำกับ

$$\hat{Y} = (43.73 + 0.92(X_{1ij} - 15)) + (14.92 + 0.19(X_{1ij} - 15))(W_{1j} - 1)$$

ความยาว	ความยาว - 15	จุดตัดแบบง่าย	ความชันแบบง่าย
9	-6	43.73 + (0.92 x -6) = 38.21	14.92 + (0.19 x -6) = 13.78
14	-1	43.73 + (0.92 x -1) = 42.81	14.92 + (0.19 x -1) = 14.73
19	4	43.73 + (0.92 x 4) = 47.41	14.92 + (0.19 x 4) = 15.68

```
> sumout1 <- summary(out1m1trimmed)
> coef(sumout1)
```

```
(Intercept)          43.7263582
I(length - 15)        0.9165510
goldcolor             -0.4915571
I(volume - 1)         14.9172766
I(nfish - 8)          -1.0904864
I(length - 15):I(volume - 1) 0.1909583
```

จุดตัดอย่างง่าย	ความชันอย่างง่าย
1	0
-6, -1, 4	0
0	0
0	1
0	0
0	-6, -1, 4

การหาระดับนัยสำคัญของจุดตัดแบบง่ายหรือความชันแบบง่าย
 ต้องใช้ผลการวิเคราะห์หาคำนวนต่อ ยกตัวอย่างทดสอบจุดตัดแบบง่าย
 ในการทดสอบอิทธิพลของปริมาณ เมื่อความยาวเท่ากับ 9 ซม.

ความยาว	ความยาว - 15	จุดตัดแบบง่าย	ความชันแบบง่าย
9	-6	$43.73 + (0.92 \times -6) = 38.21$	$14.92 + (0.19 \times -6) = 13.78$
14	-1	$43.73 + (0.92 \times -1) = 42.81$	$14.92 + (0.19 \times -1) = 14.73$
19	4	$43.73 + (0.92 \times 4) = 47.41$	$14.92 + (0.19 \times 4) = 15.68$

$$\mathbf{y} = [43.73 \quad 0.92 \quad -0.49 \quad 14.92 \quad -1.09 \quad 0.19]'$$

$$\mathbf{c} = [1 \quad -6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]'$$

$$b = \mathbf{c}'\mathbf{y} = 38.23$$

ใช้ -6 แทนที่จะเป็น 9 เพราะว่าไม่สะดวก
 วิเคราะห์ใช้ I (length - 15)

```
> psi <- coef(sumout1)[,"Estimate"]
> cvec1 <- c(1, -6, 0, 0, 0, 0)
> t(cvec1) %*% psi
      [,1]
[1,] 38.22705
```

การหาระดับนัยสำคัญของจุดตัดแบบง่ายหรือความชันแบบง่าย
ต้องใช้ผลการวิเคราะห์มาคำนวณต่อ ยกตัวอย่างทดสอบจุดตัดแบบง่าย
ในการทดสอบอิทธิพลของปริมาตร เมื่อความยาวเท่ากับ 9 ซม.

ในการหาความผิดพลาดมาตรฐาน ต้องใช้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของค่า
สัมประสิทธิ์ถดถอย

```
> vcov(sumout1)
6 x 6 Matrix of class "dpoMatrix"
              (Intercept) I(length - 15)      goldcolor I(volume - 1) I(nfish - 8) I(length - 15):I(volume - 1)
(Intercept)      0.487280995      5.320593e-03 -1.833465e-02      1.159426038 -0.0888070305      0.0122421240
I(length - 15)      0.005320593      8.184264e-04 -4.119647e-05      0.009297097      0.0001836111      0.0014480587
goldcolor      -0.018334648     -4.119647e-05      3.360999e-02     -0.004704358      0.0004026685     -0.0006692469
I(volume - 1)      1.159426038      9.297097e-03 -4.704358e-03      3.899038670     -0.2867828630      0.0468120857
I(nfish - 8)      -0.088807031      1.836111e-04      4.026685e-04     -0.286782863      0.0389798669     -0.0004492316
I(length - 15):I(volume - 1) 0.012242124      1.448059e-03     -6.692469e-04      0.046812086     -0.0004492316      0.0063825781
```

$$\text{จาก } SE(b) = \sqrt{\mathbf{c}'\text{Var}(\mathbf{y})\mathbf{c}}$$

```
> vpsi <- vcov(sumout1)
> sqrt(t(cvec1) %*% vpsi %*% cvec1)
1 x 1 Matrix of class "dgeMatrix"
      [,1]
[1,] 0.5501042
```

$$z = \frac{b}{SE(b)} = \frac{38.23}{0.55} = 65.93$$

ด้วยค่า z นี้ ทำให้จุดตัดแตกต่างจาก 0
อย่างมีนัยสำคัญ

R สามารถทดสอบจุดตัดแบบง่ายและความชันแบบง่ายได้หลายๆ ตัวพร้อมกัน

```
> cvec1 <- c(1, -6, 0, 0, 0, 0)
> cvec2 <- c(1, -1, 0, 0, 0, 0)
> cvec3 <- c(1, 4, 0, 0, 0, 0)
> cvec4 <- c(0, 0, 0, 1, 0, -6)
> cvec5 <- c(0, 0, 0, 1, 0, -1)
> cvec6 <- c(0, 0, 0, 1, 0, 4)
> cmat <- cbind(cvec1, cvec2, cvec3, cvec4, cvec5, cvec6)
> est <- t(cmat) %>% psi
> se <- sqrt(diag(t(cmat) %>% vpsi %>% cmat))
> zval <- est/se
> pval <- round(pnorm(-abs(zval)) * 2, 6)
> cbind(est, se, zval, pval)
```

		se		
cvec1	38.22705	0.6729764	56.802962	0
cvec2	42.80981	0.6909835	61.954888	0
cvec3	47.39256	0.7368450	64.318224	0
cvec4	13.77153	1.8886679	7.291661	0
cvec5	14.72632	1.9523824	7.542743	0
cvec6	15.68111	2.0918070	7.496442	0

หาอิทธิพลของปริมาตร เมื่อความยาวเป็นตัวแปรกำกับ

ความยาว (ซม.)	จุดตัดแบบง่าย			ความชันแบบง่าย		
	<i>b</i>	<i>SE</i>	<i>z</i>	<i>b</i>	<i>SE</i>	<i>z</i>
9	38.23	0.67	56.80**	13.77	1.89	7.29**
14	42.81	0.69	61.95**	14.73	1.95	7.54**
19	47.39	0.74	64.32**	15.68	2.09	7.50**

* $p < .05$, ** $p < .01$

เมื่อความยาวของปลาตัว (9 ซม.), ปานกลาง (14 ซม.), หรือสูง (19 ซม.)
อิทธิพลของปริมาตรที่มีต่อการกินอาหารปลาเป็นไปในทางบวกอย่างมีนัยสำคัญ
โดยความยาวยิ่งเพิ่ม อิทธิพลของปริมาตรต่อปลาที่มีต่อการกินอาหารยิ่งสูง

หาอิทธิพลของความยาว เมื่อปริมาตรเป็นตัวแปรกำกับ

$$\hat{Y} = (43.73 + 14.92(W_{1j} - 1)) + (0.92 + 0.19(W_{1j} - 1))(X_{1ij} - 15)$$

ปริมาตร	ปริมาตร - 1	จุดตัดแบบง่าย	ความชันแบบง่าย
0.5	-0.5	$43.73 + (14.92 \times -0.5) = 36.27$	$0.92 + (0.19 \times -0.5) = 0.825$
0.8	-0.2	$43.73 + (14.92 \times -0.2) = 40.75$	$0.92 + (0.19 \times -0.2) = 0.882$
1.1	0.1	$43.73 + (14.92 \times 0.1) = 45.22$	$0.92 + (0.19 \times 0.1) = 0.939$

```
> sumout1 <- summary(out1m1trimmed)
> coef(sumout1)
```

```
(Intercept)      43.7263582
I(length - 15)    0.9165510
goldcolor        -0.4915571
I(volume - 1)     14.9172766
I(nfish - 8)      -1.0904864
I(length - 15):I(volume - 1) 0.1909583
```

จุดตัดอย่างง่าย	ความชันอย่างง่าย
1	0
0	1
0	0
-0.5, -0.2, 0.1	0
0	0
0	-0.5, -0.2, 0.1

R สามารถทดสอบจุดตัดแบบง่ายและความชันแบบง่ายได้หลายๆ ตัวพร้อมกัน

```
> cvec1 <- c(1, 0, 0, -0.5, 0, 0)
> cvec2 <- c(1, 0, 0, -0.2, 0, 0)
> cvec3 <- c(1, 0, 0, 0.1, 0, 0)
> cvec4 <- c(0, 1, 0, 0, 0, -0.5)
> cvec5 <- c(0, 1, 0, 0, 0, -0.2)
> cvec6 <- c(0, 1, 0, 0, 0, 0.1)
> cmat <- cbind(cvec1, cvec2, cvec3, cvec4, cvec5, cvec6)
> est <- t(cmat) %*% psi
> se <- sqrt(diag(t(cmat) %*% vpsi %*% cmat))
> zval <- est/se
> pval <- round(pnorm(-abs(zval)) * 2, 6)
> cbind(est, se, zval, pval)
```

		se		
cvec1	36.2677199	0.55010419	65.92882	0
cvec2	40.7429028	0.42364151	96.17307	0
cvec3	45.2180858	0.87072188	51.93172	0
cvec4	0.8210718	0.03108074	26.41739	0
cvec5	0.8783593	0.02223749	39.49903	0
cvec6	0.9356468	0.03423250	27.33212	0

หาอิทธิพลของความยาว เมื่อปริมาตรเป็นตัวแปรกำกับ

ปริมาตร (ลบ.ม.)	จุดตัดแบบง่าย			ความชันแบบง่าย		
	<i>b</i>	<i>SE</i>	<i>z</i>	<i>b</i>	<i>SE</i>	<i>z</i>
0.5	36.27	0.55	65.93**	0.82	0.03	26.42**
0.8	40.74	0.42	96.17**	0.88	0.02	39.50**
1.1	45.22	0.87	51.93**	0.94	0.03	27.33**

* $p < .05$, ** $p < .01$

เมื่อปริมาตรของตู้ปลาต่ำ (0.5 ลบ.ม.), ปานกลาง (0.8 ลบ.ม.), หรือสูง (1.1 ลบ.ม.) อิทธิพลของความยาวปลาที่มีต่อการกินอาหารปลาเป็นไปในทางบวกอย่างมีนัยสำคัญ โดยปริมาตรยิ่งเพิ่ม อิทธิพลของความยาวปลาที่มีต่อการกินอาหารยิ่งสูง

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ

- การใส่ตัวแปรระดับกลุ่มแบ่งได้ 3 รูปแบบ

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_{1j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_{1j} + u_{1j}$$

แสดงว่า X_1 และ W_1
มีปฏิสัมพันธ์กัน

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_{1j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

แสดงว่า X_1 และ W_1
ไม่มีปฏิสัมพันธ์กัน

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_{1j} + u_{1j}$$

ไม่ควรทำ เพราะมี
ปฏิสัมพันธ์ระหว่าง
 X_1 และ W_1 แต่ไปทำให้
 $\gamma_{01} = 0$ ทำให้คำนวณ
ความชันอย่างง่ายไม่ได้

ปฏิสัมพันธ์รูปแบบอื่น

- ที่ผ่านมา กล่าวถึง ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรระดับที่หนึ่งและระดับที่สอง
- ในการวิเคราะห์พหุระดับสามารถวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรระดับที่หนึ่งด้วยกัน หรือระดับที่สองด้วยกัน

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรระดับที่หนึ่ง

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + \beta_{3j}X_{1ij}X_{2ij} + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + u_{2j}$$

$$\beta_{3j} = \gamma_{30} + u_{3j}$$

ปฏิสัมพันธ์สามารถแตกต่างกันระหว่างกลุ่มได้

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรระดับที่สอง

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij}$$

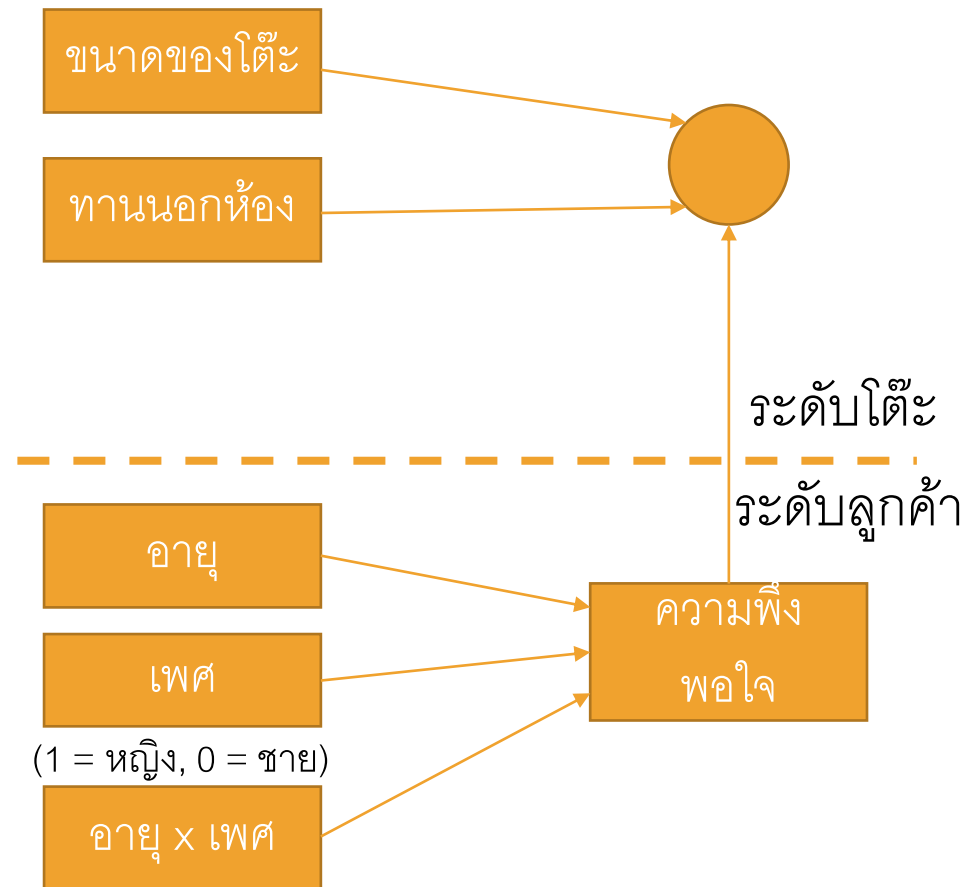
$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_{1j} + \gamma_{02}W_{2j} + \gamma_{03}W_{1j}W_{2j} + u_{0j}$$

ปฏิสัมพันธ์รูปแบบอื่น

- กระบวนการทดสอบปฏิสัมพันธ์สามารถใช้ z-test หรือการทดสอบความเป็นไปได้ (Likelihood Ratio Test) ได้
- การตรวจสอบปฏิสัมพันธ์สามารถใช้วิธีของ Bauer & Curran (2005) ได้เช่นเดิม

ปฏิสัมพันธ์รูปแบบอื่น

ศึกษาว่าเพศและอายุมีปฏิสัมพันธ์ต่อ
ความพึงพอใจหรือไม่



```
> out3m1 <- lmer(sat ~ 1 + I(age - 40)*female + I(numperson-4) + outdoor
+               + (1|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
> summary(out3m1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood ['lmerMod']
Formula: sat ~ 1 + I(age - 40) * female + I(numperson - 4) + outdoor +      (1 | tableid)
Data: dat3
```

AIC	BIC	logLik	deviance	df.resid
16541.1	16586.9	-8262.5	16525.1	2254

Scaled residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-3.00219	-0.59995	-0.00421	0.61277	2.87979

Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.
tableid	(Intercept)	65.93	8.119
Residual		59.60	7.720

Number of obs: 2262, groups: tableid, 500

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	t value	
(Intercept)	65.02384	0.62221	104.504	sig
I(age - 40)	0.24028	0.01816	13.234	sig
female	-1.98218	0.37652	-5.264	sig
I(numperson - 4)	-0.26536	0.19641	-1.351	no sig
outdoor	3.01743	0.80863	3.732	sig
I(age - 40):female	0.03998	0.02504	1.597	no sig

ในที่นี้ ปฏิสัมพันธ์ไม่ถึงระดับนัยสำคัญ
แต่จะตรวจสอบปฏิสัมพันธ์ต่อไป เพื่อ
ประโยชน์ทางการสอน

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 40) + \beta_{2j}X_{2ij} + \beta_{3j}(X_{1ij} - 40)X_{2ij} + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = 65.02 - 0.27(W_{1j} - 4) + 3.02W_{2j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = 0.24; \beta_{2j} = -1.98; \beta_{3j} = 0.04$$

$$\text{Var}(u_{0j}) = 12.36$$

$$\text{Var}(e_{ij}) = 5.99$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 40) + \beta_{2j}X_{2ij} + \beta_{3j}(X_{1ij} - 40)X_{2ij} + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = 65.02 - 0.27(W_{1j} - 4) + 3.02W_{2j} + u_{0j}$$

$$\text{Var}(u_{0j}) = 12.36$$

$$\beta_{1j} = 0.24; \beta_{2j} = -1.98; \beta_{3j} = 0.04$$

$$\text{Var}(e_{ij}) = 5.99$$

$$Y_{ij} = 65.02 + 0.24(X_{1ij} - 40) - 1.98X_{2ij} + 0.04(X_{1ij} - 40)X_{2ij} \\ - 0.27(W_{1j} - 4) + 3.02W_{2j} + u_{0j} + e_{ij}$$

ความพึงพอใจของลูกค้าเพศชายอายุ 40 ปี ในโต๊ะนั่ง 4 คนอยู่ร่วม เท่ากับ 65.02 คะแนน

หากลูกค้าเพศชาย อายุเพิ่มขึ้น 1 ปีภายในโต๊ะรูปแบบเดียวกัน (ควบคุมจำนวนคนนั่งและตำแหน่งของในร้านหรือนอกร้าน) ความพึงพอใจจะมากขึ้น 0.24 คะแนน

เพศชายมีความพึงพอใจมากกว่าเพศหญิง 1.98 คะแนน เมื่อควบคุมอายุให้เท่ากับ 40 ปี และให้อยู่ภายในโต๊ะรูปแบบเดียวกัน

ความพึงพอใจที่เพศชายมีมากกว่าเพศหญิงจะมีขนาดลดลง 0.04 คะแนน หากอายุเพิ่มขึ้น 1 ปี เมื่อควบคุมให้อยู่ภายในโต๊ะรูปแบบเดียวกัน ซึ่งปฏิสัมพันธ์นี้ไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 40) + \beta_{2j}X_{2ij} + \beta_{3j}(X_{1ij} - 40)X_{2ij} + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = 65.02 - 0.27(W_{1j} - 4) + 3.02W_{2j} + u_{0j}$$

$$\text{Var}(u_{0j}) = 12.36$$

$$\beta_{1j} = 0.24; \beta_{2j} = -1.98; \beta_{3j} = 0.04$$

$$\text{Var}(e_{ij}) = 5.99$$

$$Y_{ij} = 65.02 + 0.24(X_{1ij} - 40) - 1.98X_{2ij} + 0.04(X_{1ij} - 40)X_{2ij} \\ - 0.27(W_{1j} - 4) + 3.02W_{2j} + u_{0j} + e_{ij}$$

หากจำนวนคนในโต๊ะเพิ่มขึ้น 1 คน ควบคุมตำแหน่งในร่มหรือนอกร้านให้คงที่ ควบคุมเพศและอายุของผู้ประเมิน ความพึงพอใจจะลดลง 0.27 คะแนน ซึ่งขนาดอิทธิพลไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

โต๊ะภายนอกร้านจะได้รับการประเมินความพึงพอใจสูงกว่าโต๊ะในร้าน 3.02 คะแนน เมื่อควบคุมจำนวนโต๊ะ เพศและอายุของผู้ประเมิน

$$\hat{Y} = 65.02 + 0.24(X_{1ij} - 40) - 1.98X_{2ij} + 0.04(X_{1ij} - 40)X_{2ij}$$

หาอิทธิพลของอายุ เมื่อเพศเป็นตัวแปรกำกับ

$$\hat{Y} = (65.02 - 1.98X_{2ij}) + (0.24 + 0.04X_{2ij})(X_{1ij} - 40)$$

เพศ	จุดตัดแบบง่าย	ความชันแบบง่าย
0 (ชาย)	$65.02 + (-1.98 \times 0) = 65.02$	$0.24 + (0.04 \times 0) = 0.24$
1 (หญิง)	$65.02 + (-1.98 \times 1) = 63.04$	$0.24 + (0.04 \times 1) = 0.28$

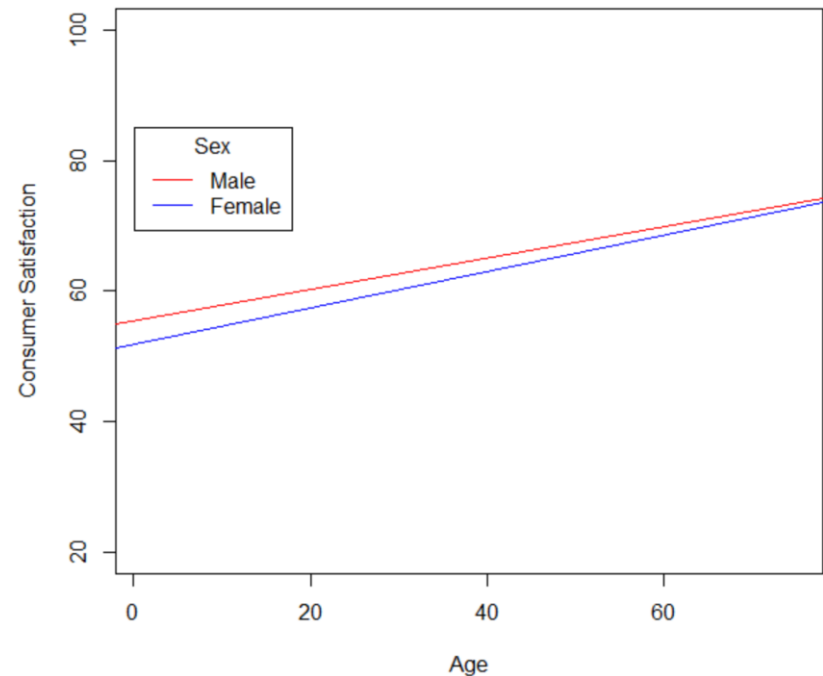
หาความแตกต่างระหว่างเพศ เมื่ออายุเป็นตัวแปรกำกับ

$$\hat{Y} = (65.02 + 0.24(X_{1ij} - 40)) + (-1.98 + 0.04(X_{1ij} - 40))X_{2ij}$$

อายุ	อายุ - 40	จุดตัดแบบง่าย	ความชันแบบง่าย
25	-15	$65.02 + (0.24 \times -15) = 61.42$	$-1.98 + (0.04 \times -15) = -2.58$
35	-5	$65.02 + (0.24 \times -5) = 63.82$	$-1.98 + (0.04 \times -5) = -2.18$
45	5	$65.02 + (0.24 \times 5) = 66.22$	$-1.98 + (0.04 \times 5) = -1.78$

$$\hat{Y} = 65.02 + 0.24(X_{1ij} - 40) = 65.02 - 0.24(40) + 0.24X_{1ij}$$

```
> plot(dat3$age, dat3$sat, type="n", xlab="Age", ylab="Consumer Satisfaction")
> abline(a = 65.02 - 0.24*40, b = 0.24, col="red")
> abline(a = 63.04 - 0.28*40, b = 0.28, col="blue")
> legend(0.1, 85, c("Male", "Female"), col=c("red", "blue"),
+       lty=1, title="Sex")
```



หาอิทธิพลของอายุ เมื่อเพศเป็นตัวแปรกำกับ

$$\hat{Y} = (65.02 - 1.98X_{2ij}) + (0.24 + 0.04X_{2ij})(X_{1ij} - 40)$$

เพศ	จุดตัดแบบง่าย	ความชันแบบง่าย
0 (ชาย)	$65.02 + (-1.98 \times 0) = 65.02$	$0.24 + (0.04 \times 0) = 0.24$
1 (หญิง)	$65.02 + (-1.98 \times 1) = 63.04$	$0.24 + (0.04 \times 1) = 0.28$

```
> sumout3 <- summary(out3m1)
> coef(sumout3)
```

	Estimate
(Intercept)	65.02383855
I(age - 40)	0.24028131
female	-1.98218092
I(numperson - 4)	-0.26536463
outdoor	3.01742609
I(age - 40):female	0.03998267

จุดตัดอย่างง่าย	ความชันอย่างง่าย
1	0
0	1
0, 1	0
0	0
0	0
0	0, 1

```

> psi <- coef(sumout3)[,"Estimate"]
> vpsi <- vcov(sumout3)
> cvec1 <- c(1, 0, 0, 0, 0, 0)
> cvec2 <- c(1, 0, 1, 0, 0, 0)
> cvec3 <- c(0, 1, 0, 0, 0, 0)
> cvec4 <- c(0, 1, 0, 0, 0, 1)
> cmat <- cbind(cvec1, cvec2, cvec3, cvec4)
> est <- t(cmat) %*% psi
> se <- sqrt(diag(t(cmat) %*% vpsi %*% cmat))
> zval <- est/se
> pval <- round(pnorm(-abs(zval)) * 2, 6)
> cbind(est, se, zval, pval)

```

```

              se
cvec1 65.0238386 0.62221223 104.50428 0
cvec2 63.0416576 0.61489594 102.52411 0
cvec3  0.2402813 0.01815627  13.23407 0
cvec4  0.2802640 0.01711384  16.37646 0

```

เพศ ลูกค้า	จุดตัดแบบง่าย			ความชันแบบง่าย		
	<i>b</i>	<i>SE</i>	<i>z</i>	<i>b</i>	<i>SE</i>	<i>Z</i>
ชาย	65.02	0.62	104.50**	0.24	0.02	13.23**
หญิง	63.04	0.61	102.52**	0.28	0.02	16.38**

หากลูกค้าชายอายุมากขึ้น จะประเมิน
ความพึงพอใจสูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ

หากลูกค้าหญิงอายุมากขึ้น จะประเมิน
ความพึงพอใจสูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ

หาความแตกต่างระหว่างเพศ เมื่ออายุเป็นตัวแปรกำกับ

$$\hat{Y} = (65.02 + 0.24(X_{1ij} - 40)) + (-1.98 + 0.04(X_{1ij} - 40))X_{2ij}$$

อายุ	อายุ - 40	จุดตัดแบบง่าย	ความชันแบบง่าย
25	-15	$65.02 + (0.24 \times -15) = 61.42$	$-1.98 + (0.04 \times -15) = -2.58$
35	-5	$65.02 + (0.24 \times -5) = 63.82$	$-1.98 + (0.04 \times -5) = -2.18$
45	5	$65.02 + (0.24 \times 5) = 66.22$	$-1.98 + (0.04 \times 5) = -1.78$

```
> sumout3 <- summary(out3m1)
> coef(sumout3)
```

	Estimate
(Intercept)	65.02383855
I(age - 40)	0.24028131
female	-1.98218092
I(numperson - 4)	-0.26536463
outdoor	3.01742609
I(age - 40):female	0.03998267

จุดตัดอย่างง่าย	ความชันอย่างง่าย
1	0
-15, -5, 5	0
0	1
0	0
0	0
0	-15, -5, 5

```

> cvec1 <- c(1, -15, 0, 0, 0, 0)
> cvec2 <- c(1, -5, 0, 0, 0, 0)
> cvec3 <- c(1, 5, 0, 0, 0, 0)
> cvec4 <- c(0, 0, 1, 0, 0, -15)
> cvec5 <- c(0, 0, 1, 0, 0, -5)
> cvec6 <- c(0, 0, 1, 0, 0, 5)
> cmat <- cbind(cvec1, cvec2, cvec3, cvec4, cvec5, cvec6)
> est <- t(cmat) %*% psi
> se <- sqrt(diag(t(cmat) %*% vpsi %*% cmat))
> zval <- est/se
> pval <- round(pnorm(-abs(zval)) * 2, 6)
> cbind(est, se, zval, pval)

```

```

              se
cvec1 61.419619 0.6425644 95.585152 0.0e+00
cvec2 63.822432 0.6158294 103.636542 0.0e+00
cvec3 66.225245 0.6415082 103.233673 0.0e+00
cvec4 -2.581921 0.4520045 -5.712158 0.0e+00
cvec5 -2.182094 0.3623190 -6.022578 0.0e+00
cvec6 -1.782268 0.4284857 -4.159456 3.2e-05

```

อายุ ลูกค้า	จุดตัดแบบง่าย			ความชันแบบง่าย		
	<i>b</i>	<i>SE</i>	<i>Z</i>	<i>b</i>	<i>SE</i>	<i>Z</i>
25	61.42	0.64	95.56**	-2.58	0.45	-5.71**
35	63.82	0.62	103.64**	-2.18	0.36	-6.02**
45	66.23	0.64	103.23**	-1.78	0.43	-4.16**

ลูกค้าอายุ 25 ปี เพศชาย จะประเมิน
ความพึงพอใจสูงกว่าเพศหญิง
อย่างมีนัยสำคัญ

ลูกค้าอายุ 35 ปี เพศชาย จะประเมิน
ความพึงพอใจสูงกว่าเพศหญิง
อย่างมีนัยสำคัญ

ลูกค้าอายุ 45 ปี เพศชาย จะประเมิน
ความพึงพอใจสูงกว่าเพศหญิง
อย่างมีนัยสำคัญ

คาบต่อไป

- การย้ายศูนย์กลางโดยใช้ค่าเฉลี่ยกลุ่ม (Group-centering)
- การบ้านที่ 5

แบบฝึกหัด

$$\text{L1:} \quad Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij} \quad e_{ij} \sim N(0, 50)$$

$$\text{L2:} \quad \begin{aligned} \beta_{0j} &= 40 + 2(W_j - 2) + u_{0j} \\ \beta_{1j} &= -1.5 + 0.1(W_j - 2) + u_{1j} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & \\ & 3.8 \end{bmatrix} \right)$$

- Y_{ij} = คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นในโรงเรียน
- X_{ij} = จำนวนวันที่หยุดเรียน
- W_j = ขนาดโรงเรียน (หน่วยร้อยคน)

แบบฝึกหัด

$$\begin{aligned} \text{L1:} \quad & Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij} & e_{ij} &\sim N(0, 25) \\ \text{L2:} \quad & \beta_{0j} = 70 - 0.1W_j + u_{0j} \\ & \beta_{1j} = 1 + 0.01W_j + u_{1j} & \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} &\sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & \\ & 0.05 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

- Y_{ij} = คะแนนเจตคติต่อหน้าของคนแปลกหน้าที่ขึ้นอยู่บนจอ โดยมีหลายหน้าซ้อนในผู้เข้าร่วมการทดลอง
- X_{ij} = ความคมชัดของรูป
- W_j = อายุของผู้เข้าร่วมการทดลอง

แบบฝึกหัด

$$\text{L1: } Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij} \quad e_{ij} \sim N(0, 25)$$

$$\text{L2: } \begin{aligned} \beta_{0j} &= 40 + 0.005W_{1j} + 1.2W_{2j} + u_{0j} \\ \beta_{1j} &= 1.1 + 0.0001W_{1j} + 0.01W_{2j} + u_{1j} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 25 & -0.2 \\ -0.2 & 0.25 \end{bmatrix} \right)$$

- Y_{ij} = ผลการปฏิบัติงาน
- X_{ij} = ประสิทธิภาพการทำงาน (ปี)
- W_{1j} = ขนาดของบริษัท (คน)
- W_{2j} = ค่าเฉลี่ยของเงินที่เพิ่มขึ้น (หน่วยเท่ากับหมื่นบาท)

แบบฝึกหัด

$$\text{L1:} \quad Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij} \quad e_{ij} \sim N(0, 36)$$

$$\begin{aligned} \text{L2:} \quad \beta_{0j} &= 45 - 0.5W_{1j} + 4W_{2j} + u_{0j} \\ \beta_{1j} &= 19 - 0.2W_{1j} + 2W_{2j} + u_{1j} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & \\ & 4 \end{bmatrix} \right)$$

- Y_{ij} = คะแนนอารมณ์ทางบวกในแต่ละวันซ้อนในผู้เข้าร่วมการทดลอง;
- X_{ij} = วันสุดสัปดาห์ (1 = ใช่; 0 = ไม่ใช่)
- W_{1j} = คะแนนความอ่อนไหวทางอารมณ์ (Neuroticism)
- W_{2j} = เพศ (1 = หญิง; 0 = ชาย)

แบบฝึกหัด

$$\text{L1: } Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij} \quad e_{ij} \sim N(0, 50)$$

$$\begin{aligned} \text{L2: } \quad & \beta_{0j} = 12 + 10W_j + u_{0j} \\ & \beta_{1j} = 8 + 2W_j + u_{1j} \\ & \beta_{2j} = 8 + 0.1W_j + u_{2j} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \\ u_{2j} \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & & \\ 7 & 4 & \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

- Y_{ij} = คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นในโรงเรียน
- X_{1ij} = จำนวนชั่วโมงที่ใช้ในการเตรียมตัว
- X_{2ij} = คะแนนผลสัมฤทธิ์การเรียนของปีที่แล้ว
- W_j = มีบริการติวเตอร (1 = มี, 0 = ไม่มี)

แบบฝึกหัด

$$\text{L1: } Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij} \quad e_{ij} \sim N(0, 25)$$

$$\begin{aligned} \text{L2: } \quad & \beta_{0j} = 70 - 0.5W_{1j} + 4W_{2j} + u_{0j} \\ & \beta_{1j} = 19 + 0.1W_{1j} + 2W_{2j} + u_{1j} \\ & \beta_{2j} = -0.2 - 0.02W_{1j} - 0.2W_{2j} + u_{2j} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \\ u_{2j} \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & & \\ 2 & 4 & \\ 0.10 & 0.01 & 0.04 \end{bmatrix} \right)$$

- Y_{ij} = คะแนนอารมณ์ทางบวกในแต่ละวันซ้อนในผู้เข้าร่วมการทดลอง;
- X_{1ij} = วันสุดสัปดาห์ (1 = ใช่; 0 = ไม่ใช่)
- X_{2ij} = ความเครียดในแต่ละวัน
- W_{1j} = คะแนนความอ่อนไหวทางอารมณ์ (Neuroticism)
- W_{2j} = เพศ (1 = หญิง; 0 = ชาย)