

ขนาดอิทธิพล (Effect Size)

โมเดลพหุระดับ (Multilevel Modeling)

สันทัด พรประเสริฐมานิต

โครงร่างการนำเสนอ

- การแบ่งความแปรปรวน
- สัมประสิทธิ์การทำนาย (Coefficient of Determination)
- โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม
- สัมประสิทธิ์การทำนายที่แตกต่างกันระหว่างโมเดล
- สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน (Standardized Regression Coefficient)

การแบ่งความแปรปรวน

- ในเบื้องต้น ให้ตัวแปรระดับที่หนึ่ง จะให้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม โดยที่ใส่ค่าเฉลี่ยกลุ่มเข้าไปในโมเดลด้วย เช่น

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij} \quad \text{ระดับที่ 1}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{02}W_{1j} + u_{0j} \quad \text{ระดับที่ 2}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{12}W_{1j} + u_{1j}$$

- รวมสมการทั้งสองระดับแล้วจะเท่ากับ

$$\begin{aligned} Y_{ij} = & \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{02}W_{1j} \\ & + \gamma_{10}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\ & + \gamma_{12}W_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + u_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + u_{0j} + e_{ij} \end{aligned}$$

การแบ่งความแปรปรวน

- สมการรวม สามารถจัดข้อมูลออกเป็น 4 กลุ่มได้ดังนี้

$$\begin{aligned} Y_{ij} = & \gamma_{10}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + \gamma_{12}W_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\ & + \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{02}W_{1j} \\ & + u_{0j} + u_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\ & + e_{ij} \end{aligned}$$

- แบ่งเป็นดังนี้
 - ส่วนของตัวแปรต้นระดับที่ 1 ผ่านความชันถาวร (Level-1 Predictors via Fixed Slopes)
 - ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับอยู่ในกลุ่มนี้ เพราะความชันของตัวแปรต้นระดับที่ 1 สามารถกำหนดได้ด้วยค่าของตัวแปรต้นระดับที่ 2
 - ส่วนของตัวแปรต้นระดับที่ 2 ผ่านความชันถาวร (Level-2 Predictors via Fixed Slopes)
 - ส่วนของตัวแปรสุ่มระดับที่ 2
 - ส่วนของตัวแปรสุ่มระดับที่ 1

การแบ่งความแปรปรวน

- สมการรวม สามารถจัดข้อมูลออกเป็น 4 กลุ่มได้ดังนี้

$$\begin{aligned} Y_{ij} = & \gamma_{10}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + \gamma_{12}W_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\ & + \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{02}W_{1j} \\ & + u_{0j} + u_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\ & + e_{ij} \end{aligned}$$

- สามารถเขียนรูปเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \\ \bar{X}_{1.j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\ W_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{X}_{1.j} \\ W_{1j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} + e_{ij}$$

การแบ่งความแปรปรวน

- ดังนั้น ความแปรปรวนของ Y_{ij} สามารถกระจายได้ดังนี้

$$Var(Y_{ij}) = Var \left(\begin{bmatrix} X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \\ \bar{X}_{1.j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\ W_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{X}_{1.j} \\ W_{1j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} + e_{ij} \right)$$

- เนื่องจากใช้การย้ายศูนย์กลางที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม ตัวแปรต้นระดับที่ 1 และตัวแปรต้นระดับที่ 2 จะไม่สัมพันธ์กัน ความแปรปรวนของ Y_{ij} จึงเท่ากับความแปรปรวนของแต่ละส่วนโดยตรง

$$Var(Y_{ij}) = Var \left(\begin{bmatrix} X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \\ \bar{X}_{1.j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\ W_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \right) + Var \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \bar{X}_{1.j} \\ W_{1j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \end{bmatrix} \right) \\ + Var \left(\begin{bmatrix} 1 \\ X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \right) + Var(e_{ij})$$

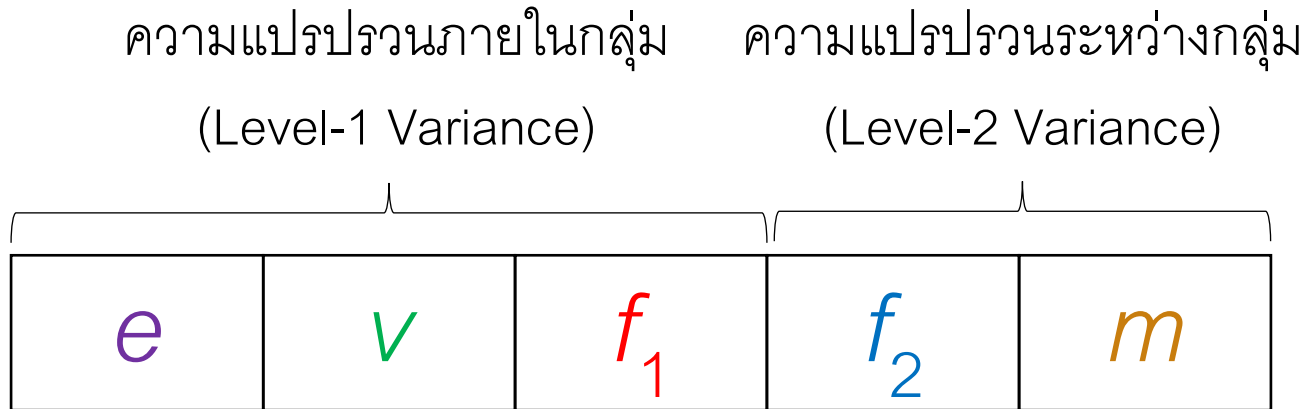
$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y_{ij}) = & \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}' \text{Var} \left(\begin{bmatrix} X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \\ \bar{X}_{1.j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\ W_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \end{bmatrix}' \text{Var} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \bar{X}_{1.j} \\ W_{1j} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \end{bmatrix} \\
& + \text{tr} \left(\text{Var} \left(\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \right) \text{Var} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \end{bmatrix} \right) \right) + \tau_{00} + \sigma^2 \\
& \boxed{\text{Var}(Y_{ij}) = f_1 + f_2 + v + m + e}
\end{aligned}$$

กล่าวคือ หากตัวแปรต้นระดับที่ 1 ตั้งศูนย์กลางที่ค่าเฉลี่ยกลุ่มทั้งหมดแล้ว ความแปรปรวนของตัวแปรตามจะแบ่งออกเป็น 5 ส่วน (Rights & Sterba, 2019) ดังนี้

1. f_1 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 1 ผ่านความชันถาวร
2. f_2 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 2 ผ่านความชันถาวร
3. v = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 1 ผ่านความชันสุ่ม
4. m = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยค่าเฉลี่ยกลุ่มที่ปรับแล้วที่แตกต่างกันระหว่างกลุ่ม
5. e = ความแปรปรวนของตัวแปรตามระดับที่ 1 ที่ไม่สามารถอธิบายได้

การแบ่งความแปรปรวน

- การแบ่งความแปรปรวนจะแบ่งแยกได้ดังนี้

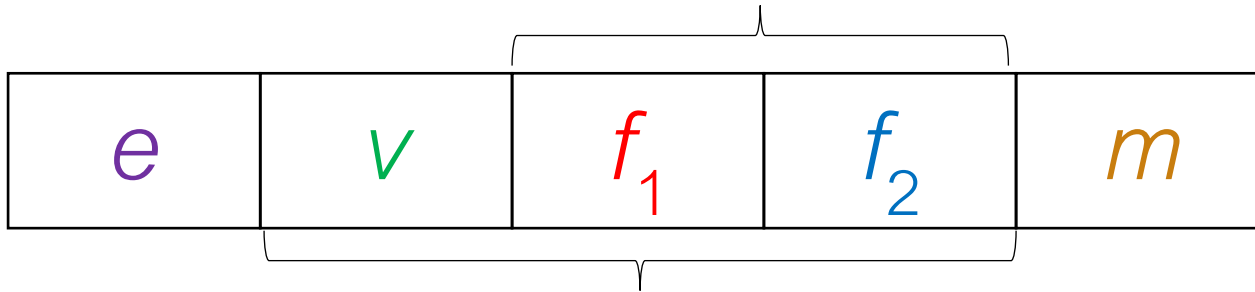


หากตัวแปรระดับที่ 1 ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม การแบ่งความแปรปรวนภายในกลุ่มและภายนอกกลุ่มจะไม่ง่ายแบบนี้ เพราะ f_1 จะมีส่วนผสมของความแปรปรวนระหว่างกลุ่มอยู่

การแบ่งความแปรปรวน

- การแบ่งความแปรปรวนจะแบ่งแยกได้ดังนี้

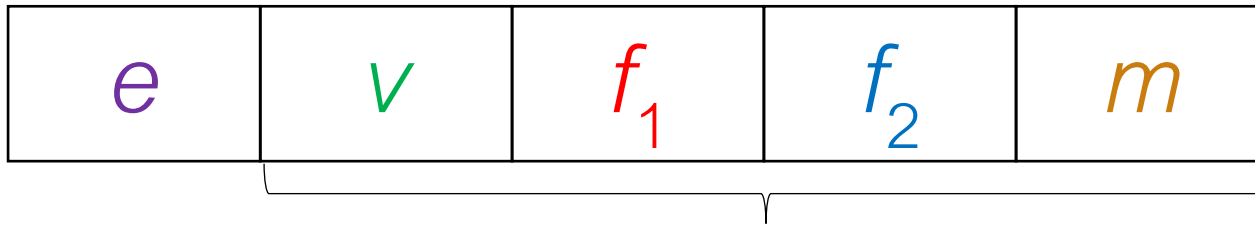
ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นทั้งหมดผ่านความชันถาวร
(Variance Explained by All Predictors via Fixed Slopes)



ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นทั้งหมดผ่านความชันถาวรและสุ่ม
(Variance Explained by All Predictors via Fixed and Random Slopes Variation)

การแบ่งความแปรปรวน

- การแบ่งความแปรปรวนจะแบ่งแยกได้ดังนี้



ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นทั้งหมดผ่านความชันถาวรและสุ่ม
และค่าเฉลี่ยที่ปรับแล้วของกลุ่ม

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- นิยามของสัมประสิทธิ์การทำนายเป็นดังนี้

$$R^2 = \frac{\text{ความแปรปรวนที่อธิบายได้}}{\text{ความแปรปรวนทั้งหมด}}$$

- จากการแบ่งความแปรปรวนของตัวแปรตามในสมการพหุระดับเป็น 5 ส่วน ทำให้สัมประสิทธิ์การทำนายสามารถนิยามได้หลากหลายรูปแบบ
 - เศษของการคำนวณสมการสัมประสิทธิ์การทำนาย อาจใช้ $f_1, f_2, v, m, f(f_1 + f_2), f_1v(f_1 + v), fv(f_1 + f_2 + v)$, หรือ $fmv(f_1 + f_2 + v + m)$
 - ส่วนของการคำนวณสมการสัมประสิทธิ์การทำนาย อาจใช้ ความแปรปรวนทั้งหมด $t(f_1 + f_2 + v + m + e)$, ระหว่างกลุ่ม $b(f_2 + m)$, หรือภายในกลุ่ม $w(f_1 + v + e)$

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- สัญลักษณ์ของสัมประสิทธิ์การทำนาย จะขึ้นกับเศษและส่วนที่ใช้คำนวณดังนี้

$$R_{?}^{2(?)}$$

$f_1, f_2, v, m, f, f_1v, fv$, หรือ fmv

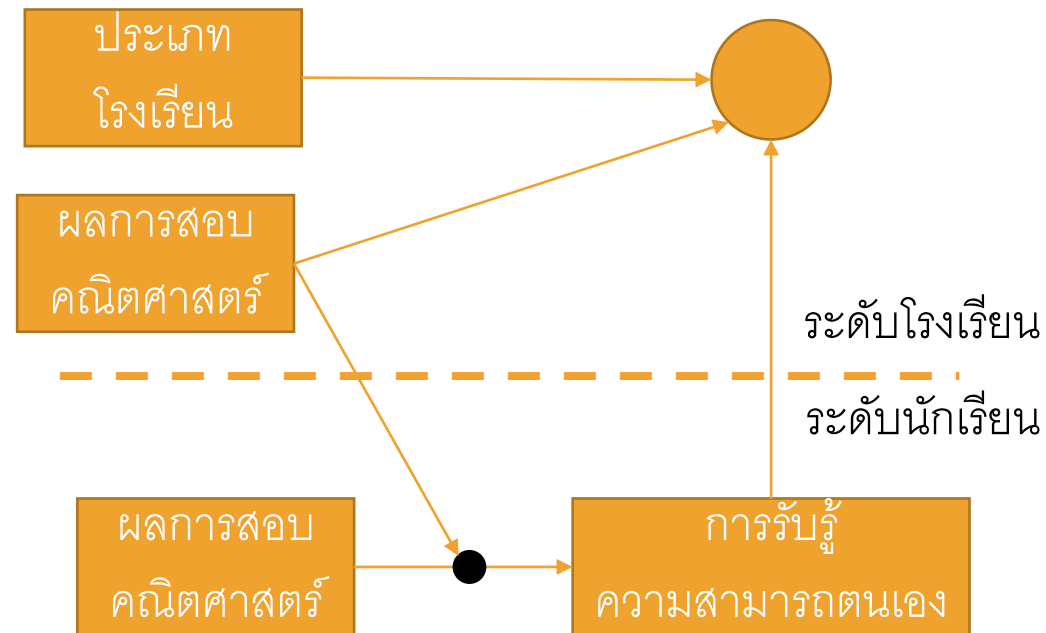
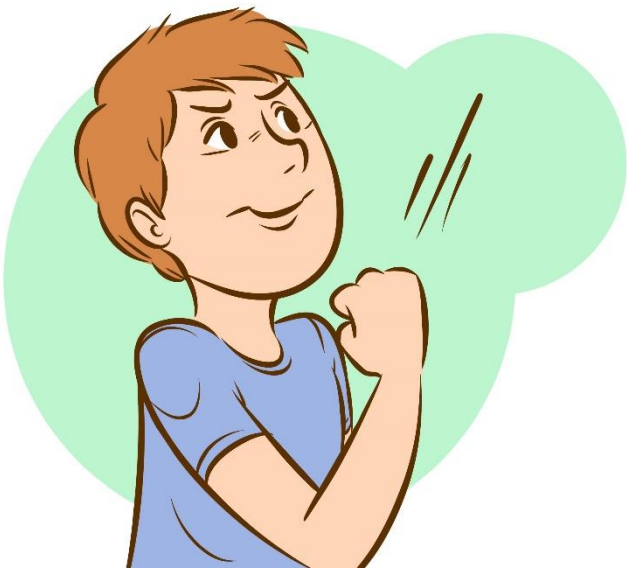
t, b , หรือ w

- เช่น

- $R_t^{2(f_1)}$ คือ สัดส่วนความแปรปรวนของตัวแปรตามทั้งหมดที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่หนึ่งผ่านความชันถาวร
- $R_w^{2(f_1v)}$ คือ สัดส่วนความแปรปรวนของตัวแปรตามภายในแต่ละกลุ่ม ที่ตัวแปรต้นภายในกลุ่มสามารถอธิบายความแปรปรวนได้ (โดยไม่จำกัดว่าความชันของตัวแปรต้นดังกล่าวในทุกกลุ่มต้องเท่ากัน สามารถแตกต่างกันได้)

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- การเลือกใช้สัมประสิทธิ์การทำนาย ขึ้นอยู่กับการตีความหมายที่ผู้วิเคราะห์ต้องการ ขอใช้ตัวอย่างนี้อธิบาย



สัมประสิทธิ์การทำนาย

- แปลความหมายความแปรปรวนในแต่ละส่วน
 - f_1 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตำแหน่งผลการสอบคณิตศาสตร์ภายในแต่ละโรงเรียนเมื่อควบคุมให้ขนาดอิทธิพลต่อการรับรู้ความสามารถคงที่ในทุกโรงเรียน
 - f_2 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยผลการสอบคณิตศาสตร์ของโรงเรียนและประเภทของโรงเรียน
 - v = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตำแหน่งผลการสอบคณิตศาสตร์ภายในแต่ละโรงเรียนที่เกิดจากขนาดอิทธิพลที่แตกต่างกันระหว่างโรงเรียน
 - m = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยความแตกต่างของค่าเฉลี่ยระหว่างโรงเรียน เมื่อควบคุมประเภทของโรงเรียน และผลการสอบคณิตศาสตร์เฉลี่ยของแต่ละโรงเรียนแล้ว
 - e = ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถของนักเรียน ซึ่งไม่สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นใด หรือความแตกต่างระหว่างกลุ่มเลย

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- แปลความหมายความแปรปรวนในแต่ละส่วน
 - f = ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถที่อธิบายได้ด้วยผลการสอบคณิตศาสตร์และประเภทของโรงเรียน เมื่อควบคุมให้ขนาดอิทธิพลของตัวแปรอิสระคงที่ทุกโรงเรียน
 - f_1v = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตำแหน่งผลการสอบคณิตศาสตร์ภายในแต่ละโรงเรียน โดยอนุญาตให้ขนาดอิทธิพลแตกต่างกันระหว่างโรงเรียน
 - fv = ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถที่อธิบายได้ด้วยผลการสอบคณิตศาสตร์และประเภทของโรงเรียน โดยอนุญาตให้ขนาดอิทธิพลของตัวแปรอิสระแตกต่างกันระหว่างโรงเรียน
 - fvm = ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นทั้งหมด รวมถึงการเป็นสมาชิกภาพของแต่ละโรงเรียน

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- ตัวอย่างเช่น

- $R_t^{2(f)}$ คือ ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถของตนเอง ที่ผลการสอบคณิตศาสตร์และประเภทของโรงเรียนอธิบายได้ โดยมองว่าความชันสุ่ม เป็นสิ่งที่ตัวแปรต้นกำหนดไม่ได้ จึงไม่ได้รวมในการคำนวณ ค่านี้มักเรียกว่า Marginal total R^2 งานวิจัยทางจิตวิทยามักรายงานค่านี้



สัมประสิทธิ์การทำนาย

- ตัวอย่างเช่น

- $R_t^{2(fvm)}$ คือ ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถของตนเอง ที่ผลการสอบคณิตศาสตร์และประเภทของโรงเรียนอธิบายได้ และการเป็นสมาชิกภาพโรงเรียนอธิบายได้ โดยมองว่าการเป็นสมาชิกโรงเรียน (จุดตัดกลุ่มและความชันกลุ่ม) เป็นสิ่งที่เรารู้และอธิบายได้ จึงรวมในการคำนวณ ค่านี้มักเรียกว่า Conditional total R^2



สัมประสิทธิ์การทำนาย

- ตัวอย่างเช่น

- $R_b^{2(f_2)}$ คือ ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถของตนเองระดับโรงเรียน ที่ค่าเฉลี่ยผลการสอบคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนและประเภทของโรงเรียนอธิบายได้
ค่านี้จะใช้เทียบเคียงกับการวิเคราะห์ถดถอยในระดับโรงเรียนผ่านการวิเคราะห์แบบรวมยอด (Aggregation)



สัมประสิทธิ์การทำนาย

- ตัวอย่างเช่น
 - $R_w^2(f_1v)$ คือ ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถของตนเองภายในแต่ละโรงเรียน ที่คะแนนผลการสอบคณิตศาสตร์อธิบายได้ ค่านี้จะใช้เทียบเคียงกับ R^2 ของการเก็บข้อมูลจากโรงเรียนเดียว แล้ววิเคราะห์ถดถอยระหว่างตัวแปรทั้งสอง (Regression within a level-2 group)



สัมประสิทธิ์การทำนาย

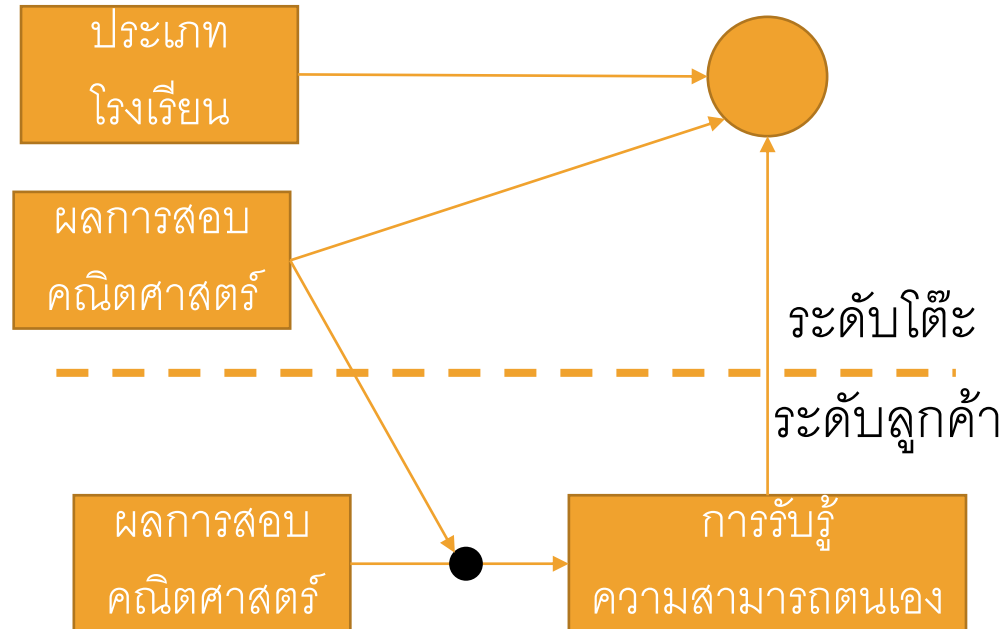
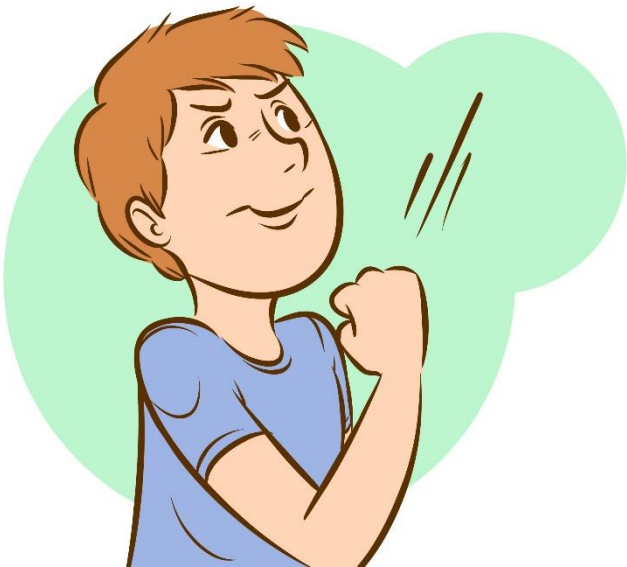
- แม้การแปลความหมายขึ้นอยู่กับผู้วิเคราะห์ การรายงานผลควรรายงานค่า $R_t^2(f_1)$, $R_t^2(f_2)$, $R_t^2(v)$, $R_t^2(m)$ เพื่อให้ผู้อ่านสามารถคำนวณค่าสัมประสิทธิ์การทำนายที่ตนเองต้องการได้
- จากนั้น ผู้วิจัยจึงเลือกสัมประสิทธิ์การทำนายที่ตนเองสนใจ มาอธิบายขนาดอิทธิพลของโมเดล
- ปัญหาของ R^2 ในการวิเคราะห์ถดถอย ยังคงอยู่เหมือนเดิม คือ
 - แม้ว่าประชากรจะไม่มีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้นและตัวแปรตาม ความสัมพันธ์ในกลุ่มตัวอย่างอาจเกิดขึ้นจากการสุ่ม ซึ่งทำให้ค่า R^2 มากกว่า 0 แม้ประชากรจะไม่สัมพันธ์กัน
 - ยังสูตรปรับแก้ในเวลานี้ แต่พอหลีกเลี่ยงการเพ้อได้โดยไม่ใส่ตัวแปรอิสระมากเกินไป และเก็บจำนวนกลุ่มมากเพียงพอ

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- r2mlm package ใน R (Shaw, Rights, Sterba, & Flake, 2020) สามารถใช้หาสัมประสิทธิ์การทำนายที่กล่าวมาข้างต้นได้เลย
- อย่าลืมว่า โมเดลที่จะหา R^2 ได้ ต้องเป็นโมเดลที่ตัวแปรต้น มีการย้ายศูนย์กลางที่ค่าเฉลี่ยกลุ่มเท่านั้น

สัมประสิทธิ์การทำนาย

ทำนายการรับรู้ความสามารถของตนเอง
ของนักเรียน ด้วยผลการสอบคณิตศาสตร์
และประเภทของโรงเรียน



```

> dat4 <- read.table("lecture6ex1.csv", sep=",", header=TRUE)
> dat4$aveach <- ave(dat4$sach, dat4$schoolid)
> dat4$diffach <- dat4$sach - dat4$aveach
> dat4$aveach50 <- dat4$aveach - 50
>
> out4m1 <- lmer(efficacy ~ 1 + diffach + aveach50 + private
+               + diffach:aveach50
+               + (1 + diffach|schoolid), data=dat4, REML=FALSE)
> summary(out4m1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood ['lmerMod']
Formula: efficacy ~ 1 + diffach + aveach50 + private + diffach:avea
Data: dat4

```

เนื่องจาก $r2m1m$ ไม่รองรับการใช้ $I()$
จึงแปลงข้อมูลนอกฟังก์ชัน

AIC	BIC	logLik	deviance	df.resid
8888.7	8939.0	-4435.3	8870.7	1982

Scaled residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-3.1594	-0.6500	0.0071	0.6654	3.2921

Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.	Corr
schoolid	(Intercept)	1.53574	1.2392	
	diffach	0.02968	0.1723	-0.22
Residual		4.34903	2.0854	

Number of obs: 1991, groups: schoolid, 50

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	t value
(Intercept)	35.602009	0.325448	109.394
diffach	0.061923	0.027110	2.284
aveach50	0.048671	0.021855	2.227
private	-0.181827	0.420004	-0.433
diffach:aveach50	0.009505	0.002548	3.730

```
> library(r2mlm)
> r2mlm(out4m1)
$Decompositions
```

แบ่งความแปรปรวนออกเป็นส่วนต่างๆ

	total	within	between
fixed, within	0.171763691927118	0.206693800427878	NA
fixed, between	0.0263571201931131	NA	0.155964397904184
slope variation	0.255308999040243	0.307228999930072	NA
mean variation	0.14263734615494	NA	0.844035602095816
sigma2	0.403932842684585	0.48607719964205	NA

$$R_t^2(f_1) = .17$$

$$R_t^2(f_2) = .03$$

$$R_t^2(v) = .26$$

$$R_t^2(m) = .14$$

	total	within	between
f1	0.171763691927118	0.206693800427878	NA
f2	0.0263571201931131	NA	<u>0.155964397904184</u>
v	0.255308999040243	0.307228999930072	NA
m	0.14263734615494	NA	0.844035602095816
f	<u>0.198120812120231</u>	NA	NA
fv	0.453429811160474	<u>0.51392280035795</u>	NA
fvm	0.596067157315415	NA	NA

ผลของ R^2 ที่ได้

ตัวแปรต้นทั้งหมดโดยกำหนดให้ความชันแบบแบบถาวรสามารถอธิบาย

ความแปรปรวนได้ 20%, $R_t^2(f) = .20$

ผลการสอบคณิตศาสตร์ส่งผลต่อการรับรู้ความสามารถของตนเอง โดยความชัน

แตกต่างกันระหว่างโรงเรียน อธิบายความแปรปรวนภายในโรงเรียนได้ 52%, $R_w^2(fv) = .51$

ผลการสอบคณิตศาสตร์เฉลี่ยระหว่างโรงเรียนและประเภทของโรงเรียน อธิบายความแปรปรวนของ

การรับรู้ความสามารถระดับโรงเรียนได้ 15%, $R_b^2(f_2) = .15$

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- Snijders & Bosker (2012) หรืองานอื่น ได้ใช้วิธีการประมาณค่าโมเดลเปล่า (Null Model) เปรียบเทียบกับโมเดลเป้าหมาย (Target Model) แล้วดูว่าความแปรปรวนคงเหลือทั้งสองระดับลดลงมากเพียงใดในการคำนวณ R^2
- Rights & Sterba (2019) ได้แสดงให้เห็นว่ากรอบนี้พวกเขาเสนอ กับแนวคิดของ Snijders & Bosker (2012) เหมือนกัน โดยแนวคิดของเขาครอบคลุมมากกว่าวิธีเดิม งานนี้จึงเสนอแค่วิธีใหม่

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- ที่ผ่านมา เราพูดถึงโมเดลที่ตัวแปรอิสระทั้งหมด ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม
- แต่ทว่า การวิเคราะห์บางประเภทยังคงใช้การย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าคงที่ หรือ การไม่ย้ายศูนย์กลาง
- Rights และ Sterba (2021) ได้อธิบายการหาสัมประสิทธิ์การทำนาย ในการวิเคราะห์ข้อมูลระยะยาว ซึ่งพื้นฐานคณิตศาสตร์ คือ การหาสัมประสิทธิ์การทำนาย ในกรณีที่ตัวแปรต้นตัวใดตัวหนึ่ง ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม
 - นอกจากนี้ พวกเขายังได้พิสูจน์ว่า การย้ายศูนย์กลางด้วยค่าคงที่ ไม่มีผลต่อ R^2

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- ยกตัวอย่าง การวิเคราะห์ที่ตัวแปรระดับที่หนึ่ง ไม่ย้ายศูนย์กลาง เช่น

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij} \quad \text{ระดับที่ 1}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j} \quad \text{ระดับที่ 2}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_j + u_{1j}$$

- รวมสมการทั้งสองระดับแล้วจะเท่ากับ

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}X_{ij} + \gamma_{11}W_jX_{ij} + u_{1j}X_{ij} + u_{0j} + e_{ij}$$

- ให้

$$X_{ij} = (X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + \bar{X}_{.j}$$

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- ยกตัวอย่าง การวิเคราะห์ที่ตัวแปรระดับที่หนึ่ง ไม่ย้ายศูนย์กลาง เช่น

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij} \quad \text{ระดับที่ 1}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j} \quad \text{ระดับที่ 2}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_j + u_{1j}$$

- รวมสมการทั้งสองระดับแล้วจะเท่ากับ

$$\begin{aligned} Y_{ij} = & \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + \gamma_{10}\bar{X}_{.j} \\ & + \gamma_{11}W_j(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + \gamma_{11}W_j\bar{X}_{.j} \\ & + u_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + u_{1j}\bar{X}_{.j} + u_{0j} + e_{ij} \end{aligned}$$

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- สมการรวม สามารถจัดข้อมูลออกเป็น 5 กลุ่มได้ดังนี้

$$\begin{aligned} Y_{ij} = & \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + \gamma_{11}W_j(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) \\ & + \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}\bar{X}_{.j} + \gamma_{11}W_j\bar{X}_{.j} \\ & + u_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + u_{0j} + u_{1j}\bar{X}_{.j} + e_{ij} \end{aligned}$$

- แบ่งเป็นดังนี้
 - ส่วนของตัวแปรต้นระดับที่ 1 ผ่านความชันถาวร (Level-1 Predictors via Fixed Slopes)
 - ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับอยู่ในกลุ่มนี้ เพราะความชันของตัวแปรต้นระดับที่ 1 สามารถกำหนดได้ด้วยค่าของตัวแปรต้นระดับที่ 2
 - ส่วนของตัวแปรต้นระดับที่ 2 ผ่านความชันถาวร (Level-2 Predictors via Fixed Slopes)
 - ส่วนของตัวแปรสุ่มระดับที่ 2 ที่มีอิทธิพลต่อตัวแปรต้นระดับที่ 1
 - ส่วนของตัวแปรสุ่มระดับที่ 2 ที่มีอิทธิพลต่อตัวแปรต้นระดับที่ 2
 - ส่วนของตัวแปรสุ่มระดับที่ 1

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- สมการรวม สามารถจัดข้อมูลออกเป็น 5 กลุ่มได้ดังนี้

$$\begin{aligned} Y_{ij} = & \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + \gamma_{11}W_j(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) \\ & + \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}\bar{X}_{.j} + \gamma_{11}W_j\bar{X}_{.j} \\ & + u_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + u_{0j} + u_{1j}\bar{X}_{.j} + e_{ij} \end{aligned}$$

- สามารถเขียนรูปเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} X_{ij} - \bar{X}_{.j} \\ W_j(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ W_j \\ \bar{X}_{.j} \\ W_j\bar{X}_{.j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{bmatrix} + [X_{ij} - \bar{X}_{.j}]' [u_{1j}] + \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{X}_{.j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} + e_{ij}$$

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- ดังนั้น ความแปรปรวนของ Y_{ij} สามารถกระจายได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_{ij}) = & \text{Var} \left(\begin{bmatrix} X_{ij} - \bar{X}_{.j} \\ W_j(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{bmatrix} \right) + \text{Var} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ W_j \\ \bar{X}_{.j} \\ W_j \bar{X}_{.j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{bmatrix} \right) \\ & + \text{Var} \left(\begin{bmatrix} X_{ij} - \bar{X}_{.j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} u_{1j} \end{bmatrix} \right) + \text{Var} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \bar{X}_{.j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \right) + \text{Var}(e_{ij}) \end{aligned}$$

- ความแปรปรวนของ Y_{ij} จึงเท่ากับความแปรปรวนของแต่ละส่วนโดยตรง เพราะแต่ละส่วนไม่สัมพันธ์กันตามทฤษฎี

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_{ij}) = & \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}' \text{Var} \left(\begin{bmatrix} X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \\ \bar{X}_{1.j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\ W_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \end{bmatrix}' \text{Var} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \bar{X}_{1.j} \\ W_{1j} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \end{bmatrix} \\ & + \text{tr} \left(\text{Var}([X_{ij} - \bar{X}_{.j}]) \text{Var}([u_{1j}]) \right) + \text{tr} \left(\text{Var}([\bar{X}_{.j}]) \text{Var}([u_{1j}]) \right) + \tau_{00} + \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(Y_{ij}) = f_1 + f_2 + v_1 + v_2 + m + e$$

กล่าวคือ หากตัวแปรต้นระดับที่ 1 ตั้งศูนย์กลางที่ค่าเฉลี่ยกลุ่มทั้งหมดแล้ว ความแปรปรวนของตัวแปรตามจะแบ่งออกเป็น 6 ส่วน (Rights & Sterba, 2019) ดังนี้

1. f_1 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 1 ผ่านความชันถาวร
2. f_2 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 2 ผ่านความชันถาวร
3. v_1 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 1 ผ่านความชันสุ่ม
4. v_2 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 2 ผ่านความชันสุ่ม
5. m = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยค่าเฉลี่ยกลุ่มที่ปรับแล้วที่แตกต่างกันระหว่างกลุ่ม
6. e = ความแปรปรวนของตัวแปรตามระดับที่ 1 ที่ไม่สามารถอธิบายได้

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- เพื่อให้เข้าใจความหมายของ v_2 ขอแสดงตัวอย่างนี้

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij} \quad \text{ระดับที่ 1}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \quad \text{ระดับที่ 2}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

- โมเดลข้างต้น จะเป็นการบังคับให้อธิติพลภายในกลุ่ม และอิทธิพลระหว่างกลุ่มเท่ากัน ซึ่งจะรวมถึงทั้งอิทธิพลคงที่ (γ_{10}) และอิทธิพลสุ่ม (u_{1j})

$$Y_{ij} = \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + u_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + \gamma_{10}\bar{X}_{.j} + u_{1j}\bar{X}_{.j} + \gamma_{00} + u_{0j} + e_{ij}$$

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

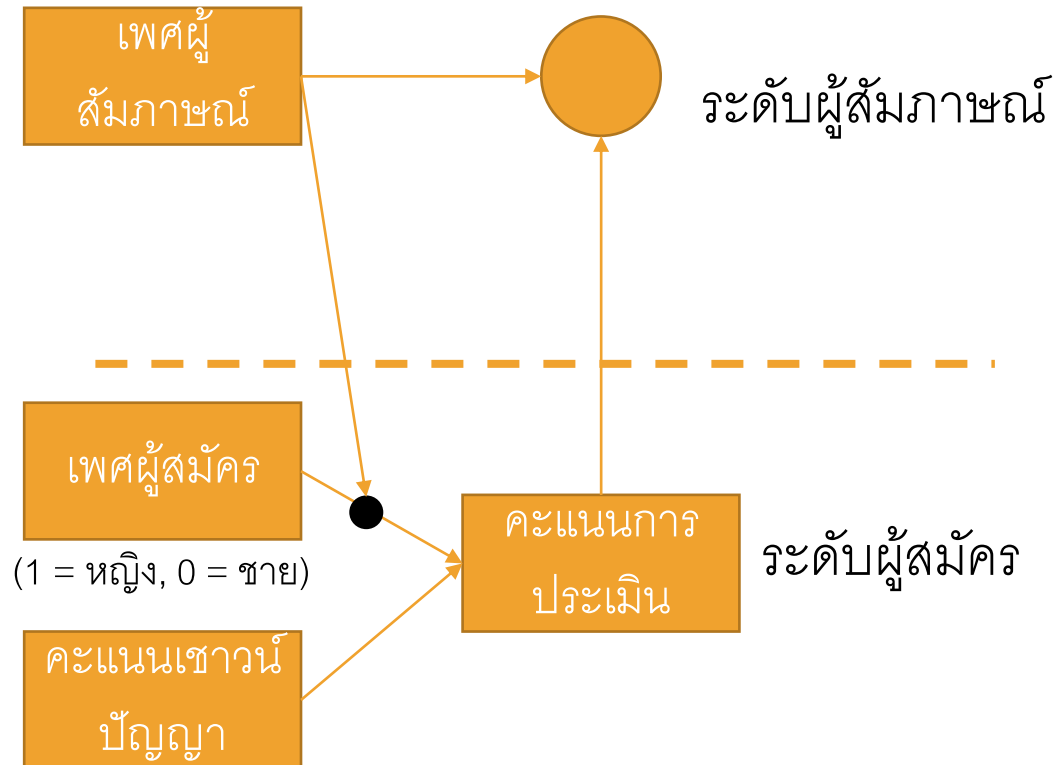
- กล่าวคือ ค่าของสัมประสิทธิ์ถดถอยของ $\bar{X}_{.j}$ แตกต่างกันระหว่างกลุ่ม โดยกลุ่มที่ 1 คือ $\gamma_{10} + u_{11}$ กลุ่มที่ 2 คือ $\gamma_{10} + u_{12}$ เป็นต้น
- v_2 จึงหมายความว่า ที่ให้สัมประสิทธิ์ถดถอยของ $\bar{X}_{.j}$ แตกต่างกันระหว่างกลุ่มนั้น อธิบายความแปรปรวนของตัวแปรตามได้มากน้อยเพียงใด
- นักวิเคราะห์มักจะเข้าใจการถดถอยแบบปกติ ที่ $\bar{X}_{.j}$ มีสัมประสิทธิ์ทำนายเหมือนกันทุกกลุ่มมากกว่า และ v_2 แปลความหมายเชิงปฏิบัติ ดังนั้นถ้าเป็นไปได้ ใช้การย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม จะทำให้การแปลความหมายตรงไปตรงมามากกว่า

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- สามารถนำ v_2 ไปรวมกับการหา R^2 ที่อธิบายไปข้างต้นได้ เช่น
 - $b = f_2 + v_2 + m$
 - $v = v_1 + v_2$
 - $R_t^{2(f)} = \frac{f_1 + f_2}{f_1 + f_2 + v_1 + v_2 + m + e}$
 - $R_t^{2(fvm)} = \frac{f_1 + f_2 + v_1 + v_2 + m}{f_1 + f_2 + v_1 + v_2 + m + e}$

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

ทดสอบอคติของผู้สัมภาษณ์ ว่าผู้สัมภาษณ์
เพศเดียวกัน จะมีอคติในการประเมิน
เพศเดียวกันสูงขึ้นหรือไม่



โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- ในเวลานี้ (10/2021) r2mlm ยังไม่ได้นำฟังก์ชันหาสัมประสิทธิ์การทำนายในโมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม ไปที่ฟังก์ชันหลัก
- อย่างไรก็ตาม Rights & Sterba (2021) ได้ให้ฟังก์ชันวิเคราะห์ข้อมูลดังกล่าวมา และเป็นฟังก์ชันซ่อนอยู่ใน r2mlm package คือ `r2mlm_long_manual`
- ฟังก์ชันนี้ ไม่ได้รองรับการใช้สูตรคำนวณในคำสั่ง `lmer` เช่น `I()` , `:` , หรือ `*` ดังนั้นจึงต้องคำนวณข้อมูลเหล่านี้นอกฟังก์ชัน

```

> library(lme4)
> library(r2mlm)
> dat5 <- read.table("lecture4ex2.csv", sep=";", header=TRUE)
> dat5$iqc <- dat5$iq - 100
> dat5$int <- dat5$eesex * dat5$ersex
> out5 <- lmer(score ~ 1 + eesex + iqc + ersex + int
+               + (1 + eesex|erid), data=dat5, REML=FALSE)
> summary(out5)
Linear mixed model fit by maximum likelihood ['lmerMod']
Formula: score ~ 1 + eesex + iqc + ersex + int + (1 + eesex | erid)
Data: dat5

            AIC      BIC    logLik deviance df.resid
61641.0    61705.9 -30811.5   61623.0     9991

Scaled residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.7413 -0.6367 -0.0048  0.6410  3.4320

Random effects:
Groups   Name      Variance Std.Dev. Corr
erid     (Intercept) 20.1152   4.4850
          eesex       0.7979   0.8933   0.12
Residual                21.7645   4.6652
Number of obs: 10000, groups:  erid, 1000

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept) 75.538700   0.221217 341.469
eesex       -0.413234   0.137868  -2.997
iqc          0.029418   0.003299   8.918
ersex        0.009887   0.312847   0.032
int          1.073648   0.194981   5.506

```

จำนวนปฏิสัมพันธ์ และย้ายศูนย์กลางนอกฟังก์ชัน

```
> sumout5 <- summary(out5)
> r2mlm::r2mlm_long_manual(data=dat5,
+                             covs=c("eesex", "iqc", "ersex", "int"),
+                             random_covs=c("eesex"),
+                             gammas=coef(sumout5)[-1, "Estimate"],
+                             clusterID="erid",
+                             Tau=as.matrix(Matrix::bdiag(VarCorr(out5))),
+                             sigma2=getME(out5, "sigma")^2)
```

$$R_t^{2(f_1)} = .006$$

$$R_t^{2(f_2)} = .002$$

$$R_t^{2(v_1)} = .005$$

$$R_t^{2(v_2)} = .000$$

$$R_t^{2(m)} = .483$$

แบ่งความแปรปรวนออกเป็นส่วนต่างๆ

\$Decompositions

	total	within	between
fixed slopes (within)	0.00582204913193309	0.0113016365460723	NA
fixed slopes (between)	0.0021708245650446	NA	0.00447732071508045
slope variation (within)	0.00462639247317185	0.00898065355795313	NA
slope variation (between)	0	NA	0
intercept variation (between)	0.482678196353395	NA	0.99552267928492
residual (within)	0.504702537476455	0.979717709895975	NA

\$R2s

	total	within	between
f1	0.00582204913193309	0.0113016365460723	NA
f2	0.0021708245650446	NA	0.00447732071508045
v1	0.00462639247317185	0.00898065355795313	NA
v2	0	NA	0
m	0.482678196353395	NA	0.99552267928492
f	<u>0.0079928736969777</u>	NA	NA
fv	0.0126192661701495	0.0202822901040254	0.00447732071508045
fvm	0.495297462523545	NA	NA

ผลของ R^2 ที่ได้

ตัวแปรต้นทั้งหมดโดยกำหนดให้ความชันแบบแบบถาวรสามารถอธิบายความแปรปรวนได้ 0.8%, $R_t^{2(f)} = .008$

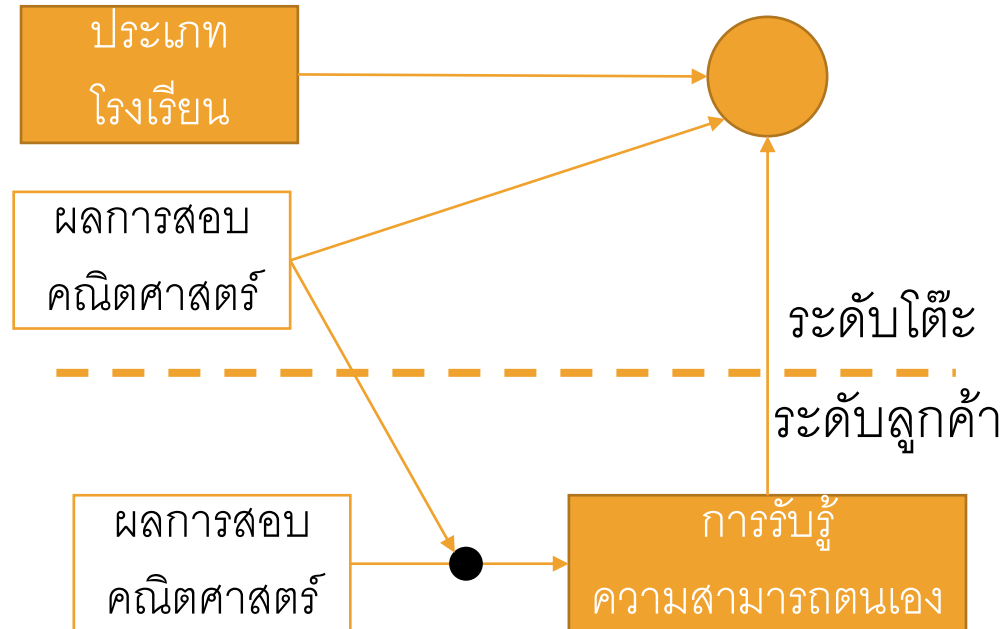
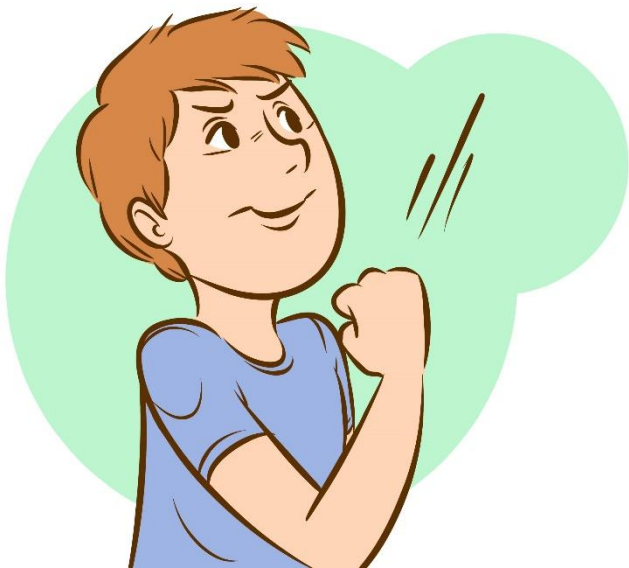
สาเหตุที่ v_2 มีค่าเท่ากับ 0 เพราะผู้สัมภาษณ์แต่ละคน สัมภาษณ์ผู้สมัครเพศชายและหญิงอย่างละ 5 คนเท่ากัน จึงไม่มีอิทธิพลของเพศผู้สมัครเฉลี่ยระหว่างกลุ่ม

ความแตกต่างระหว่างสัมประสิทธิ์การทำนาย

- เราสามารถเปรียบเทียบโมเดล 2 โมเดล ว่าค่าที่แตกต่างกันระหว่าง 2 โมเดล สามารถอธิบายความแปรปรวนของตัวแปรตามได้เพิ่มขึ้นเพียงใด
- ค่า ΔR^2 ที่ได้จากการวิเคราะห์พหุระดับนั้น จะไม่ได้ออกมาเพียงค่าเดียว และการใส่ค่าที่แตกต่างกัน ส่งผลต่อ R^2 แต่ละส่วนแตกต่างกัน เช่น
 - การเพิ่มตัวแปรระดับที่ 1 แบบย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม ควรจะเพิ่ม f_1 และ v แต่ลด e
 - การเพิ่มตัวแปรระดับที่ 2 ควรจะเพิ่ม f_2 และลด m
 - การเพิ่มความชันแบบสุ่ม ควรจะเพิ่ม v และลด e
 - การเพิ่มปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ ควรเพิ่ม f_1 ลด v และ e

ความแตกต่างระหว่างสัมประสิทธิ์การทำนาย

ต้องการตรวจสอบว่า การเพิ่มผลการสอบ
คณิตศาสตร์ สามารถอธิบายความแปรปรวน
ได้เพิ่มเติมมากกว่าประเภทโรงเรียนเท่าใด



ทำนายด้วยประเภทโรงเรียนอย่างเดียว

```
> out4m2 <- lmer(efficacy ~ 1 + private + (1|schoolid), data=dat4,
> summary(out4m2)
Linear mixed model fit by maximum likelihood ['lmerMod']
Formula: efficacy ~ 1 + private + (1 | schoolid)
Data: dat4
```

	AIC	BIC	logLik	deviance	df.resid
	10096.3	10118.7	-5044.2	10088.3	1987

Scaled residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-5.8152	-0.6287	0.0196	0.6398	4.2909

Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.
schoolid	(Intercept)	1.627	1.276
Residual		8.812	2.968

Number of obs: 1991, groups: schoolid, 50

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	t value
(Intercept)	36.0042	0.2725	132.148
private	-0.5694	0.3853	-1.478

```
> anova(out4m2, out4m1)
```

Data: dat4

Models:

out4m2: efficacy ~ 1 + private + (1 | schoolid)

out4m1: efficacy ~ 1 + diffach + aveach50 + private + diffach:aveach50 + (1 + diffach | schoolid)

	npar	AIC	BIC	logLik	deviance	Chisq	Df	Pr(>Chisq)
out4m2	4	10096.3	10119	-5044.2	10088.3			
out4m1	9	8888.7	8939	-4435.3	8870.7	1217.6	5	< 2.2e-16 ***

 signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

เพิ่มผลการเรียนคณิตศาสตร์

```
> out4m1 <- lmer(efficacy ~ 1 + diffach + aveach50 + private
+ + diffach:aveach50
+ + (1 + diffach|schoolid), data=dat4, REML=FALSE)
> summary(out4m1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood ['lmerMod']
Formula: efficacy ~ 1 + diffach + aveach50 + private + diffach:aveach50
Data: dat4
```

	AIC	BIC	logLik	deviance	df.resid
	8888.7	8939.0	-4435.3	8870.7	1982

Scaled residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-3.1594	-0.6500	0.0071	0.6654	3.2921

Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.	Corr
schoolid	(Intercept)	1.53574	1.2392	
	diffach	0.02968	0.1723	-0.22
Residual		4.34903	2.0854	

Number of obs: 1991, groups: schoolid, 50

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	t value
(Intercept)	35.602009	0.325448	109.394
diffach	0.061923	0.027110	2.284
aveach50	0.048671	0.021855	2.227
private	-0.181827	0.420004	-0.433
diffach:aveach50	0.009505	0.002548	3.730

สองโมเดลแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

คำสั่งใช้ในการเปรียบเทียบ R^2 ระหว่าง 2 โมเดล

```
> r2mlm_comp(out4m2, out4m1)
```

```
$`Model A R2s`
```

```
total      within between
f1 0      0      NA
f2 0.00770865701454532 NA 0.0474712819765213
v 0      0      NA
m 0.154677035841989 NA 0.952528718023479
f 0.00770865701454532 NA NA
fv 0.00770865701454532 0 NA
fvm 0.162385692856534 NA NA
```

```
$`Model B R2s`
```

```
total      within      between
f1 0.171763691927118 0.206693800427878 NA
f2 0.0263571201931131 NA 0.155964397904184
v 0.255308999040243 0.307228999930072 NA
m 0.14263734615494 NA 0.844035602095816
f 0.198120812120231 NA NA
fv 0.453429811160474 0.51392280035795 NA
fvm 0.596067157315415 NA NA
```

```
$`R2 differences, Model B - Model A`
```

```
total      within      between
f1 0.17176369 0.2066938 NA
f2 0.01864846 NA 0.1084931
v 0.25530900 0.3072290 NA
m -0.01203969 NA -0.1084931
f 0.19041216 NA NA
fv 0.44572115 0.5139228 NA
fvm 0.43368146 NA NA
```

R_t^2	1	2	ΔR^2
f_1	0	.17	.17
f_2	.01	.03	.02
v	0	.26	.26
m	.15	.14	-.01
f	.01	.20	.19

ผลการเรียนคณิตศาสตร์สามารถอธิบายความแปรปรวน

ทั้งสองระดับได้เพิ่มขึ้น 19%, $\Delta R_t^2(f) = .19$

สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

- ในการวิเคราะห์ถดถอย สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน คือ หากตัวแปรอิสระเพิ่มขึ้น 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานแล้ว ตัวแปรตามเปลี่ยนแปลงไปกี่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เมื่อควบคุมค่าอื่นให้คงที่
- ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานในที่นี้ คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรนั้นตามธรรมชาติ เช่น คะแนนเชาว์ปัญญา ควรใช้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากความแปรปรวนทั้งหมด (Total variance)
- ดังนั้น ในการวิเคราะห์พหุระดับ จึงไม่ต้องทำสัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐานแต่ละระดับ เพราะเราต้องการผลการวิเคราะห์ที่ทราบว่า หากตัวแปรนี้เปลี่ยนแปลงไป 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตามธรรมชาติ จะส่งผลต่อตัวแปรตามอย่างไร

สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

- วิธีการที่ง่ายที่สุด คือ การแปลงค่าตัวแปรให้เป็นคะแนนมาตรฐาน ก่อนนำไปวิเคราะห์พหุระดับ
- ค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยที่ได้ จะเป็นสัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน แต่ไม่ควร
แปลความหมายระดับนัยสำคัญของโมเดลนี้ เพราะไม่ได้คำนึงถึงความ
ผิดพลาดสุ่มของค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ใช้หาคะแนนมาตรฐาน

สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

```
> dat1$zconsume <- scale(dat1$consume) }  
> dat1$zlength <- scale(dat1$length) }  
> dat1$avezlength <- ave(dat1$zlength, dat1$groupid) }  
> dat1$diffzlength <- dat1$zlength - dat1$avezlength }  
>  
> volume <- dat1[!duplicated(dat1$groupid), "volume"]  
> mvolume <- mean(volume)  
> sdvolume <- sd(volume)  
> dat1$zvolume <- (dat1$volume - mvolume) / sd(volume)
```

แปลงตัวแปรระดับที่ 1 ให้เป็นคะแนนมาตรฐาน

หาค่าเฉลี่ยกลุ่ม และทำ

Group mean centering

สร้างตัวแปรระดับที่ 2 ใหม่

เพราะค่าของตัวแปรแต่ละกลุ่ม

จะมีค่าซ้ำกัน ควรลดมาให้

1 กลุ่มมีเพียง 1 ค่าเท่านั้น

หา M และ SD ของปริมาตร

เปลี่ยนให้เป็นคะแนนมาตรฐานด้วย M และ SD ที่คำนวณได้

วิเคราะห์พหุระดับปกติ

```
> out1z23 <- lmer(zconsume ~ 1 + diffzlength + avezlength + zvolum  
+ + diffzlength:zvolum + (1 + diffzlength|groupid),  
+ + data=dat1, REML=FALSE)  
> summary(out1z23)  
Linear mixed model fit by maximum likelihood ['lmerMod']  
Formula: zconsume ~ 1 + diffzlength + avezlength + zvolum + diffzlen  
(1 + diffzlength | groupid)  
Data: dat1
```

AIC	BIC	logLik	deviance	df.resid
963.2	1005.5	-472.6	945.2	802

Scaled residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-3.14847	-0.65743	0.02342	0.65482	2.93474

Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.	Corr
groupid	(Intercept)	0.319744	0.56546	
	diffzlength	0.006453	0.08033	0.58
Residual		0.126302	0.35539	

Number of obs: 811, group

สังเกตว่า γ_{00} มีค่าใกล้ 0

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	t value
(Intercept)	-0.003563	0.058226	-0.061
diffzlength	0.626757	0.016704	37.521
avezlength	0.797198	0.130463	6.111
zvolum	0.232776	0.062356	3.733
diffzlength:zvolum	0.038541	0.016111	2.392

สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

ตัวแปรอิสระ	<i>b</i>	<i>SE</i>	<i>t</i>	β
จุดตัด	18.65	2.39	7.80	
ค่าเบี่ยงเบนของความยาวปลาภายในตู้ปลา (A)	7.28	0.67	10.94	.627
ค่าเฉลี่ยความยาวปลาของแต่ละตู้ปลา	11.00	1.80	6.11	.797
ปริมาตรตู้ปลา (B)	5.85	1.57	3.73	.233
A x B	1.93	0.81	2.39	.039

ถ้าปลาภายในตู้ปลา มีความยาวเพิ่มขึ้นเทียบเท่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความยาวปลาทั้งหมดแล้ว การกินอาหารปลาจะเพิ่มขึ้นเทียบเท่า .627 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ถ้าตู้ปลามีความยาวเฉลี่ยของปลาเพิ่มขึ้นเทียบเท่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความยาวปลาทั้งหมดแล้ว การกินอาหารปลาจะเพิ่มขึ้นเทียบเท่า .797 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ถ้าตู้ปลาที่มีปริมาตรเพิ่มขึ้นเทียบเท่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของปริมาตรตู้ปลาทั้งหมดแล้ว การกินอาหารปลาจะเพิ่มขึ้นเทียบเท่า .233 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ตัวแปรอิสระ	<i>b</i>	<i>SE</i>	<i>t</i>	β
จุดตัด	18.65	2.39	7.80	
ค่าเบี่ยงเบนของความยาวปลาภายในตู้ปลา (A)	7.28	0.67	10.94	.627
ค่าเฉลี่ยความยาวปลาของแต่ละตู้ปลา	11.00	1.80	6.11	.797
ปริมาตรตู้ปลา (B)	5.85	1.57	3.73	.233
A x B	1.93	0.81	2.39	.039

ถ้าปริมาตรเพิ่มขึ้น 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน อิทธิพลมาตรฐานของความยาวปลาภายในตู้ปลาที่มีต่อการกินอาหารปลาจะเพิ่มขึ้น .039

อย่างไรก็ตาม การเปรียบเทียบระหว่างค่าเฉลี่ยความยาวของปลาแต่ละตู้ปลา และปริมาตรตู้ปลานั้น ก็ไม่ได้เกิดจากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเดียวกัน

- ค่าเฉลี่ยความยาวปลาของแต่ละตู้ปลา คำนวณจากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานรวม
- ปริมาตรตู้ปลา คำนวณจากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานระหว่างตู้ปลา.
- ดังนั้น ค่า β ของทั้งสองตัวแปร ก็ยังไม่ควรใช้เปรียบเทียบกันอยู่ดี

สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

- นอกจากเรื่องส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานไม่ตรงกันแล้ว ตัวแปรระดับที่ 1 อาจมีความชันสุ่ม ซึ่งสะท้อนออกมาโดยสัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐานได้ยาก
- วิธีการที่ดีกว่า คือ การคำนวณ $\Delta R_t^2(f)$, $\Delta R_t^2(fvm)$ ระหว่างโมเดลที่มี และไม่มีตัวแปรที่ต้องการหาการอธิบายความแปรปรวน

จากโมเดลรวม

$\text{consume} \sim 1 + \text{difflengthx} + \text{avelengthx} + \text{volume}$
 $+ \text{difflengthx}:\text{volume} + (1 + \text{difflengthx}|\text{groupid})$

1. ตัด difflengthx ออกจากโมเดล

$\text{consume} \sim 1 + \cancel{\text{difflengthx}} + \text{avelengthx} + \text{volume}$
 $+ \cancel{\text{difflengthx}:\text{volume}} + (1 + \cancel{\text{difflengthx}}|\text{groupid})$

2. ตัด avelengthx ออกจากโมเดล

$\text{consume} \sim 1 + \text{difflengthx} + \cancel{\text{avelengthx}} + \text{volume}$
 $+ \text{difflengthx}:\text{volume} + (1 + \text{difflengthx}|\text{groupid})$

3. ตัด volume ออกจากโมเดล

$\text{consume} \sim 1 + \text{difflengthx} + \text{avelengthx} + \cancel{\text{volume}}$
 $+ \cancel{\text{difflengthx}:\text{volume}} + (1 + \text{difflengthx}|\text{groupid})$

สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

- ได้ผลดังนี้

ตัวแปร	$R_t^2(f)$	$R_t^2(fvm)$	$\Delta R_t^2(f)$	$\Delta R_t^2(fvm)$
โมเดลรวม	.557	.876		
ค่าเบี่ยงเบนของความยาวปลา ภายในตู้ปลา (A)	.229	.489	.328	.387
ค่าเฉลี่ยความยาวปลาของแต่ละ ตู้ปลา	.458	.880	.099	-.004
ปริมาตรตู้ปลา (B)	.494	.873	.063	.003

ค่าเบี่ยงเบนความยาวปลา มีอิทธิพลทั้งทางตรงและปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับรวม 33%

หากรวมอิทธิพลความชันสุ่มของค่าเบี่ยงเบนความยาวปลาเพิ่มเติม จะมีอิทธิพล 39%

สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

- ได้ผลดังนี้

ตัวแปร	$R_t^2(f)$	$R_t^2(fvm)$	$\Delta R_t^2(f)$	$\Delta R_t^2(fvm)$
โมเดลรวม	.557	.876		
ค่าเบี่ยงเบนของความยาวปลา ภายในตู้ปลา (A)	.229	.489	.328	.387
ค่าเฉลี่ยความยาวปลาของแต่ละ ตู้ปลา	.458	.880	.099	-.004
ปริมาตรตู้ปลา (B)	.494	.873	.063	.003

ในระดับตู้ปลา ความยาวเฉลี่ยของปลาจะมีอิทธิพลสูงกว่าปริมาตรของตู้ปลา

ไม่แปลกที่ค่าใกล้ 0 เพราะเหมือนการย้ายความแปรปรวนไปมาระหว่าง f_2 และ m

ถ้าสังเกตดีๆ จะพบว่าค่าความเป็นไปได้ ของโมเดลปกติและโมเดลมาตรฐานไม่ตรงกัน

```
> out1b23 <- lmer(consume ~ 1 + difflengthx + avelengthx + volume
+               + difflengthx:volume + (1 + difflengthx|groupid),
+               data=dat1, REML=FALSE)
> summary(out1b23)
Linear mixed model fit by maximum likelihood ['lmerMod']
Formula: consume ~ 1 + difflengthx + avelengthx + volume + difflengthx
(1 + difflengthx | groupid)
Data: dat1
```

AIC	BIC	logLik	deviance	df.resid
4100.1	4142.4	-2041.1	4082.1	802

```
> out1z23 <- lmer(zconsume ~ 1 + diffzlength + avezlength + zvolume
+               + diffzlength:zvolume + (1 + diffzlength|groupid),
+               data=dat1, REML=FALSE)
> summary(out1z23)
Linear mixed model fit by maximum likelihood ['lmerMod']
Formula: zconsume ~ 1 + diffzlength + avezlength + zvolume + diffzlength
(1 + diffzlength | groupid)
Data: dat1
```

AIC	BIC	logLik	deviance	df.resid
963.2	1005.5	-472.6	945.2	802

ที่ไม่เท่ากัน เพราะตัวแปรตามอยู่คนละสเกลกัน ถ้าตัวแปรตามอยู่สเกลเดียวกันจะเปรียบเทียบกันได้

ตัวแปรตามปกติ ตัวแปรอิสระมาตรฐาน

```
> out1zb23 <- lmer(consume ~ 1 + diffzlength + avezlength + zvolume
+               + diffzlength:zvolume + (1 + diffzlength|groupid),
+               data=dat1, REML=FALSE)
> summary(out1zb23)
Linear mixed model fit by maximum likelihood ['lmerMod']
Formula: consume ~ 1 + diffzlength + avezlength + zvolume + diffzlength
(1 + diffzlength | groupid)
Data: dat1
```

AIC	BIC	logLik	deviance	df.resid
4100.1	4142.4	-2041.1	4082.1	802

ตัวแปรตามมาตรฐาน ตัวแปรอิสระปกติ

```
> out1bz23 <- lmer(zconsume ~ 1 + difflengthx + avelengthx + volume
+               + difflengthx:volume + (1 + difflengthx|groupid),
+               data=dat1, REML=FALSE)
> summary(out1bz23)
Linear mixed model fit by maximum likelihood ['lmerMod']
Formula: zconsume ~ 1 + difflengthx + avelengthx + volume + difflengthx
(1 + difflengthx | groupid)
Data: dat1
```

AIC	BIC	logLik	deviance	df.resid
963.2	1005.5	-472.6	945.2	802

สังเกตว่าค่าเท่ากับด้านบน แสดงว่าการทำให้เป็นคะแนนมาตรฐานไม่ได้เปลี่ยนแปลงเนื้อหาของโมเดล

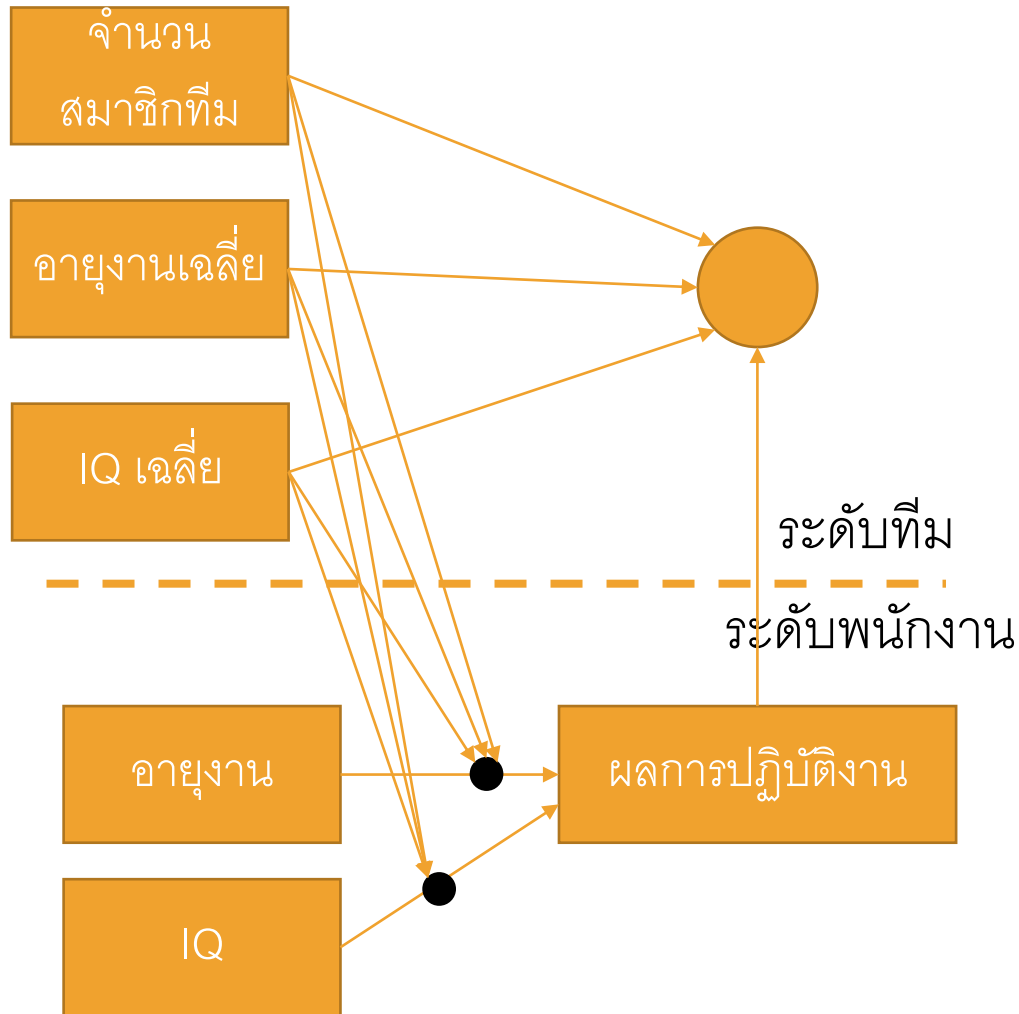
สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

- การทำคะแนนสัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน ควรใช้ในการเปรียบเทียบภายในโมเดลเดียวกัน ระหว่างตัวแปรระดับเดียวกัน ที่หารด้วยส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานประเภทเดียวกันเท่านั้น
- เช่นเดียวกันกับการวิเคราะห์ถดถอย สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐานไม่ควรใช้เปรียบเทียบระหว่างโมเดล
- หากต้องการขนาดอิทธิพล ควรใช้ ΔR_t^2 ในการรายงานผล

คาบต่อไป

- การสร้างโมเดล

แบบฝึกหัด



จงแปลความหมายจากข้อมูลต่อไปนี้

Source	R^2_t
f_1	.15
f_2	.18
v	.10
m	.22
e	.35